Klein-仁科の公式導出の過程 (II)*
——理研の仁科資料を中心に——

矢崎裕二**

前稿I[45]では，理研の仁科資料に基づき，Klein-仁科の公式[10]導出の過程と，それに続く仁科の単名論文[14]が生まれる過程を考察し，彼等の考え方や技法の進展について述べた．これに続いて本稿IIでは，同じく理研の仁科資料をもとに，Kleinと仁科が最も苦心したと思われる散乱後の電子の終状態の問題について，彼等の取り組みの跡を辿り，最後にKleinと仁科が前稿Iで述べた対応原理的な方法を採用した理由を考察する．

1. 終状態の問題

前稿Iの2節で述べたように，自由電子のDirac方程式の解には，運動量とエネルギーを指定してもスピンについての縮退のために2つの独立な状態がある．散乱における電子の終状態としては，このうち2つの直交する状態を取り，各々からの強度への寄与の和を取らなければならない．この2つの状態の選び方としては，今日ならヘリシティ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/p$ の固有値$=\pm1$の固有状態を取ることが普通に行われるが，特にこれに限らなくても一般に任意の直交する2つの状態を取ればよい．つまり2つの終状態の選び方の妥当性については簡単明瞭な判定条件があり，ただ直交性を確かめれば良いわけである．ところが，Klein-仁科の仕事が行われた1928年の時点においては，ヘリシティという概念はまだ導入されていなかったばかりでなく，そもそもDirac方程式の解となる4成分の波動関数について，その直交性の概念も明確になってはいなかったらしい．Dirac方程式が出て半年足らず，負エネルギー状態の存在をめぐってこの理論そのものの正否にすら疑問が持たれていた時である．この新しい4成分の波動関数の物理的意味や扱い方についてもまだ確立されたところは少なかった．

そこでKleinと仁科は散乱後の電子の2つの終状態を設定するに当たって，直交性の条件の代わりに次のような考え方をしたようである．すなわち，その2つの状態に物理的な意味付けを与え，始状態から2つの終状態への遷移が確率論で言う排反事象の関係にあるなら，その設定の仕方は妥当であると考えるのである．例えばスピンの向きが不変に保たれた状態と反転した状態への遷移は排反事象に当たる．そして非相対論的なSchrödinger方程式の場合には，任意の運動量の解として σ_z の固有値 ±1 の固有状態を取ることができるから，例えば始状態として $\sigma_z=+1$ の固有状態，終状態として $\sigma_z=\pm1$ の固有状態を採用すればよい．ところがDirac方程式の場合には事情が異なる．運動量 $\boldsymbol{p}=0$ の始状態においては，Dirac方程式の解として σ_z の ±1 の固有状態 $\{\psi_1=1, \psi_2=\psi_3=\psi_4=0\}$ と $\{\psi_1=0, \psi_2=1, \psi_3=\psi_4=0\}$ を取ることができる．しかし $\boldsymbol{p}\neq0$ の終状態の場合には $p_x=p_y=0$ でない限り σ_z の固有状態はDirac方程式の解にならない．従って，散乱の過程においてスピンの向きが不変に保たれた状態と反転した状態という簡単な意味付けのできる終状態を採用することができないのである．このためにKleinと仁科は自分達が採用した2つの終状態の妥当性について殆ど最後の段階まで懸念を感じていたらしい．この疑問は，結局，最終段階においてKleinによって解決されるのであるが，それに至る経緯を，まず以下のKleinから仁科宛の2つの手紙から推測し，次いで他の資料にもとづいてその裏付けを述べたい．

1つは1928年10月27日付の手紙[24][13]である．これは計算メモ類の資料に混じって見つけられたもので，封筒はなく畳んだ折り目も見られない．冒頭に"Just a few lines accompanying the manuscripts, which I hope will reach you in time."と書かれているところから，仁科単名論文の原稿をKleinが投稿前に一部修正し，この修正した原稿（の写し）と共に送られた手紙ではないかと推測される．仁科は1928年10月初めにCopenhagen

---

* 1991年6月6日受理
** 東京都立上野高等学校

を離れ，パリ，ロンドンを経由して10月31日にル・アーヴルからアメリカに向けて出帆した[28]．*Zs. f. Phys.* の Klein と仁科の共著論文[10]及び仁科単名論文[14]の受理の日付は共に1928年10月30日である．この手紙の中から終状態の問題に関連のある個所を取り出してみる．文中「論文」とあるのは仁科単名論文を指すものと思われる．尚，番号は以後に個別に各個所に言及する必要上筆者が付けたものである．

①“今，論文の中で行われている自由電子の縮退の扱い方には，あいまいさはないと思える．”

②“しかし磁場の下での固有関数が問題．これはまだ完全に解明されていない点だと思う．”

③“従って，あなたが論文の中で使った固有関数は，前に我々が考えたほど簡単に「スピン」と関連付けられない．”

④“しかしこのことは，あなたの結果には影響しない．ただスピンに言及したところは，あなたが与えたようなはっきりした言い方はできないだろうと思う．”

2つ目の手紙は1928年12月2日付[23][13]で，これは *Zs. f. Phys.* の共著論文と単名論文の校正刷に同封されて送られたものである．ここからも同様に必要な個所に上に続く番号を付けて引用する．

⑤“スピンの難点はこうであった．あなたが Copenhagen を離れる数日前に，読んでいただくように渡した磁場中の固有関数に関するところだが，そこでは任意の速度の場合に $\psi_1=0, \psi_2=0$* がそれぞれ固有関数になることを証明するつもりだった．”

⑥“これが誤りであることは，まだ田舎にいた時に一緒に考えたことからわかるはずだったが，私は時がたつうちにその時の結論の一部を忘れてしまっていた．……”

⑦“私は問題の縮退を適切に扱うことだけに的を絞ることにした．その結果が論文の§2の書き替えである．縮退はこの扱い方の方が良いことがわかった．それは，各エネルギーと運動量の値に対する独立な固有関数をみつける簡明な方法を与えるからである．”

⑧“しかしその他にも固有関数はいくらでもある．例えば我々が考えた $\psi_1=0, \psi_2=0$ である．だが次の点を忘れてはならない．我々がこれ等を適切な固有関数だと考えた理由は，Bessel 関数への移行は別として，それ等が磁場中での固有関数だと信じたからであった．”

⑨“実際，今度 u^*, v^* と名付けた新しい関数を用いて $d\bar{d}, s\bar{s}$ 等の関係を皆導き直すまでは，私は我々の強度計算に確信が持てずにいた．今では心配する必要はなかったのだと考える方に傾いているが，とにかく u^*, v^* を使うと議論がより簡単になるのはまちがいない．”

以上を併せ考えると，彼等の終状態の問題への取り組みは次のような経緯を辿ったと考えられる．

1. 終状態として $\{0, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$；$\{\psi_1, 0, \psi_3, \psi_4\}$ 型の Dirac 方程式の解を選ぶ．この選定が妥当である理由は，これ等が z 方向の静磁場の下で，$\pm z$ 方向の磁気モーメントを持つエネルギーの固有状態に結び付けられるからである（磁場→0の極限，この点後述）と考えた．（⑧参照）
2. やがて静磁場の下での固有状態が $\psi_1=0, \psi_2=0$ 型であるというのは誤りだとわかる（それは，まだ避暑地にいた頃のことらしい）．（②, ③, ⑥参照）
3. 静磁場の下での固有状態を用いた意味付けはできなくても $\psi_1=0, \psi_2=0$ 型の解を終状態として採用すること自体は間違っていないと考える．（①, ④参照）
4. しかし $\psi_1=0, \psi_2=0$ 型の解の明瞭な物理的意味付けができない以上一抹の不安は残り，この問題は懸案となっていた．（②, ⑤, ⑨参照）
5. 最後に Klein が $p=0$ の解に Lorentz 変換を施すことによって $p\neq0$ の解を導く方法を考案し，この懸案を解決した（これは共著論文[10]の§2に述べられている）．（⑦, ⑨参照）

$p=0, \sigma_z=\pm1$ の解に Lorentz 変換を施して得られる $p\neq0$ の解には「電子の静止系においてはスピンが $\pm z$ 方向を向いた状態」という明確な意味付けができ，そして確かに $p=0, \sigma_z=1$ or -1 の始状態からこの2つの終状態への遷移は互いに排反事象に当たると考えられる．実はこの場合の解の具体的な形を求めると，これはまさしく $\psi_1=0, \psi_2=0$ 型になる．従ってここでは Lorentz 変換は新たな解を導入するわけではなく，懸案となっていた解に明確な意味付けを与える役割を果たすわけである．しかしこの Lorentz 変換の方法は，スピンが任意の方向を向いた $p=0$ の解に適用できる点でより広い一般性を持つことに注意したい．上記の引用の⑨で Klein が“新しい関数を用いて導き直す”と言っているのはこの点を指していると思われる．この最後の変更が行われたのは，仁科が1928年10月上旬に Copenhagen を離れた後のことである．

さて，手紙以外の資料で以上の経緯の裏付けとなるものを挙げよう．

まず，先の $\psi_1=0, \psi_2=0$ によって終状態を指定する立場は仁科の単名論文[14]の方に生き残っており，この論文の p. 870 に“終状態としては，互いに独立な固有関数を u_1, v_1 もしくは u_2, v_2 がゼロに等しいものに選ぶ”と明言されている．Klein-仁科の共著論文[10]においては，Klein の最終的な変更によってこのような終状態の規定

* 4つの成分をもつ Dirac 方程式の解のうち，第1成分=0の解と第2成分=0の解を意味する．

の仕方はLorentz変換による方法に取って代わられているのであるが，前稿Iの4節で述べた資料[174](独文の説明入りで最終段階の強度計算の前までを整理して述べた仁科のノート)では$\psi_1=0, \psi_2=0$型の終状態を選んでおり，これはKleinによる変更前の考え方を示すものと見られる(実はこのノートでは行列ρ_iの表現が異なるので，$\psi_1=0, \psi_2=0$の代わりに$\psi_3=0, \psi_4=0$の形を取っている)．さらに[174]では，この終状態を採用すると，直線偏光の入射波に対して，散乱波の強度が電子の始状態のスピンの向きに依存しないという結果が得られる，と述べている．このことは，彼等が，$\psi_1=0, \psi_2=0$型の解に静磁場の下でのエネルギーの固有状態を用いた意味付けはできないにしても，それ等を終状態として選ぶこと自体は妥当である，と考える上での1つの支えになったのではないかと思われる．

また，Iの4節で述べたように，仁科単名論文の手書き原稿(資料〔167〕)と出版された論文(14)とを比べてみると，数個所，終状態についての記述にちがうところが見られ，手書き原稿の方が磁気モーメントの向きをはっきり指定する言い方になっていることに気付く，このことも10月27日付の手紙の③，④と符合している．

静磁場の下での固有状態

論文では触れられていないが，Kleinと仁科は相当の努力を払って静磁場の存在の下でのDirac方程式を解く試みを行っていた．これが終状態の問題に関連して行われたことは先に述べたところから明かである．この試みは主としてKleinによるものらしくKleinが全体の処方を箇条書にしたメモ(資料[212-iii])とKleinの計算メモ(資料[194], [205]〜[209])が残されている．計算メモはいくつかの断片に分かれており，整然と論旨を辿れるわけではないが，これ等の計算を，英文の説明入りで論文の草稿のように系統立てて述べた仁科のノート(資料[195])があり，このおかげで彼等のこの取り組みの筋道を大変明瞭に読み取ることができる．その大要を以下に記してみよう．

1. まずz方向の静磁場を与えるベクトル・ポテンシャルの下でのDirac方程式を書き下す．
2. 角運動量のz成分$J_z=l_z+\frac{\hbar}{2}\sigma_z$はハミルトニアンと可換であることを示し，解としてこの固有状態を考える．
3. 運動量のz成分と，円筒座標(r, θ, z)の角度変数θを消去する変換を行うと，Dirac方程式は4つの成分の各々についてのrのみを含む常微分方程式に帰着される．
4. 磁場について1次の近似でこれを解くと，rのBessel関数で表わされる近似解を得る．
5. 電子を円筒内に閉じ込めるような境界条件を置く．(これは離散的なエネルギー固有値を得るためであろう．)すなわち$r=R$において電荷密度$\varphi\psi$(φは波動関数ψに共役な関数)の値をゼロにする，という条件である．実はφはψのエルミート共役量とすべきであり，そうするとこの境界条件を満たすことは不可能であることが確かめられる．しかしKleinと仁科は次のように考えたらしい．φはψの方程式と共役な方程式の解として定まり，その4つの成分の係数はψの4成分の係数とは独立に定められる．そこでこれ等の係数を適当に選ぶことにより，境界条件を満たすことができ，且つ離散的なエネルギー固有値が決まる，という考え方である．これは誤りであるが，ここにもDirac方程式の4成分の波動関数の扱い方が確立していなかった当時の状況の反映を見ることができる．
6. こうして得られたBessel関数型の固有解を重ね合わせると，磁場$H\to 0, R\to\infty$の極限において自由電子の平面波解を構成することができる．その結果，$p_x=p_y=0$の場合に限り，$\psi_3=0$型の解と$\psi_4=0$型の解が得られることが示される．

以上で仁科のノートは終わっているが，先に述べた終状態の問題に関連して注目すべきことは，$H\to 0, R\to\infty$の極限において，$p_x=p_y=0$でない限り$\psi_3=0$または$\psi_4=0$型の解は得られないことである．このことは先に引用したKleinの12月2日付の手紙の⑥—— $\psi_1=0, \psi_2=0$が磁場の存在の下での固有状態とするのは誤り，それは既に田舎にいたときの考察からわかるはずだった——と符合しているようにも思える．(このノートでも資料[174]と同じく行列ρ_iの表現が異なるので，Kleinの言う$\psi_1=0, \psi_2=0$は，こちらでは$\psi_3=0, \psi_4=0$に相当する．)しかしこの議論には共役な波動関数についての扱いに誤りが含まれているから，最後まで彼等がこのノートに記されたような議論に依拠していたとは考え難い．実際Kleinの10月27日付の手紙の②には「磁場の存在の下での固有状態の問題はまだ明確になっていないと思う」と記されている．そのような訳で，この仁科のノートに記された考察が，彼等の終状態の問題への取り組みの中でどのような役割を果たしたものか，ということをはっきり位置付けることはできないのであるが，12月2日付の手紙の⑧によれば$\psi_1=0, \psi_2=0$を磁場中の固有状態と考えていた時期があり，そこに「Bessel関数への移行」という言葉が出てくるところを見ると，その時の結論はこのノートに記された近似解を基にして得られた可能性がある．例えば，このノートの議論において「$r<R$の領域に閉じ込める」という人為的な境界条件を取り除いてみると，与えられたJ_zの値に対して，先

の Bessel 関数の近似解より $\psi_3=0, \psi_4=0$ というタイプの解を作ることができる．そして，この2つの解はスピン $\frac{\hbar}{2}\sigma$ の正反対向きの期待値を与えるのである．

さて，磁場について1次の近似を採用したために Klein と仁科の試みは結局不成功に終わったのではあるが，その近似を用いる前の上記3．の段階で得られた1成分についての常微分方程式は厳密に正しいものであり，磁場の存在の下での Dirac 方程式を解く上で1つの重要な段階に到達していると言える．これは当時の労作として評価されるべきものであろう．

この Klein と仁科が得た静磁場の下での方程式は，今日では厳密に解くことができる．適当な変数変換を行うと，これは合流型超幾何微分方程式に変形できる．それを解くと，人為的な境界条件を設定することなく，離散的なエネルギー固有値（相対論的ランダウ準位）が得られる．また，この厳密解を用いて $\psi_3=0, \psi_4=0$ 型の解を作ることもできる．これ等の解はスピンの期待値として $\pm z$ 方向の一対の値を与える．しかし $p_z\neq0$ のときには，一定の J_z の下で最大の $|\langle\sigma_z\rangle|$ を与える状態ではないから，スピンの磁気モーメントについて何等かの明確な特徴を持つ状態とは言い難い．その意味では Klein と仁科の「$\psi_1=0, \psi_2=0$ は磁場中の固有状態ではない」という結論は正しかったと言えそうである．

Klein と仁科にとっての最大の問題

以上，前稿Iの4節から本節にわたる仁科資料の検討の結果，結論として言えることは，Klein-仁科の公式の導出において彼等が最も苦心したのは，Dirac 方程式の解である4成分の波動関数についての概念上の問題，すなわちスピン状態の物理的な意味付けの問題であった，ということである．電子と電磁場の相互作用の扱いの対応原理的な方法自体は，先行する Gordon, Klein の理論によってレールが敷かれていたと言えるが，スピンの問題は Klein-Gordon 方程式には出てこなかった真に新しい事柄であり，スピン演算子やスピン状態の扱いをめぐっては，具体的な強度計算においても，言葉の表現の上でも，様々な模索と進展の過程が見られる．従来，Klein-仁科の苦心談としては強度計算の煩雑さの方が強調されているが，最大の難点はむしろスピン状態の物理的な意味とその扱い方にあったのである．

2. 対応原理的な方法を採用した理由

前稿Iの2節で見たように，Klein と仁科が Compton 散乱を扱うにあたって採用したのは対応原理的な方法（半古典的扱い）であった．これは，当時それ以外の方法がなかったためであると解釈され勝ちであるが，二人の仕事が行われた1928年の春から夏にわたる期間における理論の状況を振り返って見ると，他に取るべき道も拓かれていたことがわかる[1][2]．Compton 散乱を量子力学の枠組の中で，より首尾一貫したやり方で扱うためには，1つは散乱の遷移確率を与える理論と，もう1つは輻射場の量子化が必要であるが，この2つのどちらについても1926年から1927年までの間に Dirac が論文を書いている．

2.1 Dirac の仕事

まず，これ等の Dirac の一連の仕事を辿ってみることにしよう．遷移確率については文献 (29) の論文（1926年）の最後の節で，時間に依存する摂動論を展開して遷移の問題を扱う方法を示し，逐次近似によってこれを解く定式化を与えている．

次に文献 (30) の論文（1927年）では，まず一般に Bose 系についての第2量子化を行い，それを光子系に適用する理論が展開される．これは場の量子論の発端となった重要な仕事であるが，後に一般的に用いられるようになった Heisenberg-Pauli[31] の Lagrange 形式から出発する理論とは異なる定式化を行っているので，以下に要点を記してみよう．

まず1体の系を考え，そのハミルトニアンを H_0+V とする．V は外部との相互作用項である．この系の波動関数 ψ を H_0 の固有関数 ψ_r を用いて $\psi=\Sigma_r b_r\psi_r$ と展開する．$|b_r|^2$ はこの系が状態 r にある確率であるから，同じ系を相互作用なしに多数集めた多体系を考えるなら $|b_r|^2$ は状態 r にある粒子数 N_r を与えることになる．そこで

$$b_r=e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_r}N_r^{1/2},\qquad b_r^*=N_r^{1/2}e^{\frac{i}{\hbar}\theta_r}$$

と書く．$\dot{b}_r$ と $i\hbar\dot{b}_r^*$ の表式は $F=\Sigma_{sr}b_r^*H_{rs}b_s$ をハミルトニアンとする正準運動方程式の形に書き下せる．

$$\dot{b}_r=\frac{1}{i\hbar}\frac{\partial F}{\partial b_r^*},\qquad i\hbar\dot{b}_r^*=-\frac{\partial F}{\partial b_r}$$

こうして b_r と $i\hbar b_r^*$ は互いに正準共役な変数とみなせるから，量子化の一般的な手続きに従って

$$[b_r,i\hbar b_s^*]=i\hbar\delta_{rs},\qquad [b_r,b_s]=[b_r^*,b_s^*]=0$$

を要請する．ここで第2量子化が行われたわけである．これを N_r,θ_r の関係に書き直すと次のようになる．

$$[N_r,\theta_s]=\delta_{rs},\qquad [N_r,N_s]=[\theta_r,\theta_s]=0$$

ハミルトニアン F も N と θ を使って書き直せる．全系の状態は，1体系の固有状態の占有数を指定することによって表わされ，$\psi(N_1',N_2',\cdots\cdots)$ と書かれる．Schrödinger 方程式は次のようになる．

$$i\hbar\frac{\partial\psi(N_1',N_2',\cdots\cdots)}{\partial t}=F(N,\theta)\,\psi(N_1',N_2',\cdots\cdots)$$

尚，$[N_r,\theta_s]=\delta_{rs}$ の関係より

$$e^{\pm\frac{i}{\hbar}\theta_r}\psi(N_1',N_2'\cdots N_r',\cdots)=\psi(N_1',N_2',\cdots,N_r'\pm1,$$

…)

が，導かれ，$e^{\pm\frac{i}{\hbar}\theta_r}$ は粒子の生成，消滅を表わす演算子であることがわかる．こうして場の量子化についての基本的な道具立が整えられた．

最後に文献(32)の論文(1927年)では，電子と電磁場の相互作用を定式化した上で，2次摂動により分散の理論を展開する．まず，先の場の量子化の方法を光子系に適用し，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を N と θ を用いて書き下す．長波長近似により $e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の因子を落とすと

$$\boldsymbol{A}=\Sigma_r \boldsymbol{e}_r L^{-3/2}\left[\frac{\hbar c^2}{\nu_r}\right]^{1/2}(N_r^{1/2}e^{\frac{i}{\hbar}\theta_r}+e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_r}N_r^{1/2})$$

である．θ_r の指数関数は，時間依存性を表わす因子 $\cos 2\pi\nu_r t$ を $\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{\hbar}\theta_r}+e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_r})$ と書き替えることにより得られた．$N_r^{1/2}$ を含む因子は振動数 ν_r の光子の energy flux と Poynting vector の関係を考察するところから導かれたものである．電子と電磁場の相互作用項は $(1/2m)(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2$ を展開して出る $(e/mc)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ より $(e/c)\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A}$ と書かれる．

次いで2次摂動の遷移確率の表式が次の形に導かれる．

$$w_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\Sigma_n\frac{v_{fn}v_{ni}}{E_i-E_n}\right|^2\rho_f$$

v は相互作用項，ρ_f は終状態近傍の状態密度である．ここで v として先の $(e/c)\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A}$ を用いて，原子内電子の遷移を伴う光の散乱(分散)を論じる．

このDiracの分散の理論は，次の2点の修正を施せば直ちにCompton散乱に適用できる．
1つはベクトル・ポテンシャルに空間依存性を表わす $e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の因子を付け加えること，
もう1つは電子のハミルトニアンをDirac方程式の

$$H=-c\rho_1\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-\rho_3 mc^2$$

に書き替えることである．これに伴って相互作用項は $-e\rho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}$ となる．また，電子の状態はDirac方程式の自由電子の解 $\psi(\boldsymbol{p})$ によって表わされることになる．あとはDiracの分散理論の方法に沿ってCompton散乱の遷移確率を求めることができる．

さて，これ等Diracの電磁場の量子化をめぐる一連の仕事については，もちろんKleinも仁科もよく承知していたはずである．Diracが場の量子化の論文[30]を書いたのはCopenhagen滞在中のことであり，1927年1月26日付と1月28日付の仁科のコロキゥム・ノート[33][13]にはこのDiracの話が記されている．論文の受理の日付は1927年2月2日である．その上Kleinは，1927年の秋にJordanと共同でDiracの場の量子化の方法を相互作用のあるBose粒子系に拡張する仕事[34][2]もしているから，場の量子化には少なからぬ興味を持っていたはずである．事実Klein-仁科の論文[10]の序の部分にもDiracの輻射理論についての言及があり"このDiracの理論を用いても入射輻射の強度についての第1近似においては，Gordon流の対応原理的な方法と同じ結果を与えるものと期待される"と述べられている[2]．しかし仁科資料について見る限り，彼等がこのDiracの理論による方法を試みた形跡はない．

2.2　対応原理的な方法を選んだ理由

そこで，Kleinと仁科はどうして輻射場の量子化を用いる首尾一貫した方法を採用せず，対応原理的な方法のほうを選んだのか，ということを考えてみる．これについては以下の3つの理由を挙げることができる．

その1：Kleinは対応原理的な方法の元祖

第1に，前稿Iで述べたように，Kleinは1927年の論文[7]で，対応原理的な方法に基づいて荷電粒子と電磁場との相互作用を扱う一般的な方法を定式化しており，言わばこの方法の元祖に当たる(Klein-Gordon方程式もここで導かれた)．そしてCompton散乱についてもその方法に基づいてエネルギーと運動量の保存則を導いていた．一方GordonもKleinに2ヵ月ほど先んじて，やはりKlein-Gordon方程式に基づきCompton散乱の強度を与える論文[6]を出している．文献(16)の手記の中でKleinはこれ等以前の研究に言及した上で"そういう経緯から自ずと，二人とも，Diracの新理論によるならCompton効果はどうなるかということを考えていた"と述べている．

このような訳で，Kleinにとっては対応原理的な方法には愛着があり，Dirac方程式の場合にもこの方法を試してみたい気持ちがあったことは充分に考えられる．さらに，これも前稿Iで述べたように，Klein-仁科の仕事にはその狙いの一つとして，Diracの相対論的電子論自体の正否を検証する意図も含まれていた．そのためにはKlein-Gordon方程式の場合とDirac方程式の場合を同じ方法で扱った上で，得られる結果の違いを見ておく方が都合がよいことも確かである．

その2：規格化の問題

第2の理由として自由電子についてのDirac方程式の解の規格化の問題がある．同じく文献(16)の手記の中でKleinはこう言っている．"ここで一つの難点にぶつかったことを挙げる．それは，今なら何でもないことのように思えるが，Dirac電子を箱の中に閉じ込めるのは不可能だということである．……結局，我々はPauliの助言に基づいて以前のGordonの方法を踏襲することにした．"箱の中に閉じ込められないというのは，

Dirac 方程式が1階の微分方程式であるため，ある境界面上で $\psi=0$ と置くと，境界内部で $\psi\neq0$ となるような解は存在しない，ということであるが，この事実から Klein と仁科は Dirac 電子の場合には運動量の固有状態を表わす $e^{ik\cdot r}$ 型の解の波数 $\boldsymbol{k}$ を離散的にするような規格化が行えない，と考えたのではないかと思われる．$e^{ik\cdot r}$ 型の解の規格化には2通りの方法がある．1つは有限な体積 L^3 を考えて固有関数を $\psi_k(r)=L^{-3/2}e^{ik\cdot r}$ とし

$$\iiint\psi_k{}^*(r)\psi_{k'}(r)dr=$$

$$L^{-3}\iiint_{(L^3)}e^{-ik\cdot r}e^{ik'\cdot r}dr=\delta_{k,k'}$$

とする箱式規格化であり，この場合は周期的境界条件を適用して $\boldsymbol{k}$ は $\left(\frac{2\pi}{L}n_1,\frac{2\pi}{L}n_2,\frac{2\pi}{L}n_3\right)$ と離散的な値を取る．もう1つは無限の空間を考えて $\boldsymbol{k}$ の値は連続的に取り

$$\psi_k(r)=(2\pi)^{-3/2}e^{ik\cdot r}$$

$$\iiint\psi_k{}^*(r)\psi_{k'}(r)dr=$$

$$(2\pi)^{-3}\iiint e^{-ik\cdot r}e^{ik'\cdot r}dr=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

とする δ 関数式規格化である．Iの1節で述べたように Gordon の Compton 散乱の論文[6]では δ 関数式の規格化が用いられている．ところで，Dirac の電磁場の量子化においては輻射場の波数 $\boldsymbol{k}$ は離散的に扱わないと都合が悪い．そうすると，電子と輻射場を一緒にして扱うなら，電子の波動関数の波数も同じ境界条件の下で離散的に扱わないと空間についての考え方の整合性が損なわれてしまう．波数を離散的に扱うなら先に述べたような周期的境界条件を用いればよい．これは今日では常套手段になっている．そしてこの周期的境界条件は Dirac 電子の場合にも問題なく用いられる．ところが，Klein-仁科の仕事が行われた当時，周期的境界条件という考え方はまだ広くなじまれたものではなかったようである．元来，周期的境界条件は数学的な扱いの便宜上考え出された人工的な条件である．波数ベクトルを離散的にするには，もう1つの方法として，境界面上で波動関数の値を0とする定常波型の境界条件がある．こちらの方は物理的な意味も明確である．そして，離散的な波数で状態を指定するときの状態密度は，定常波型でも周期的境界条件でも変わりはない．このことが，物理的な意味があまり明確でない周期的境界条件というものを容認する拠り所となっていたと考えられる．ところが Dirac 方程式の解については先に述べたように定常波型の境界条件は許されない．そうすると，この場合には周期的境界条件を使う拠り所も怪しくなってしまう．つまり波数ベクトルを離散的に取ることには問題がある．Klein の言っている難点とは恐らくこういう意味であろう．このことも Klein と仁科が δ 関数式の規格化を用いる Gordon の方法を採用する1つの原因となったと考えられるのである．

ここで周期的境界条件の受け入れられ方についてもう少し付言しておく．Born や Dirac はこれを量子力学の論文に早くから用いていた．実は Born が周期的境界条件を考えたのは量子力学以前のことである．彼は文献(35)の，格子振動の古典的な扱いを論じた論文の中で，固有振動の状態密度を扱うところに周期的境界条件を導入した．これは周期的境界条件の元祖にあたるものかもしれない．また量子力学の創立後に書かれた確率解釈に関わる重要な論文[36]においても，やはり状態密度を論じるところに周期的境界条件を用いている．

Dirac も文献(37)において，有限な領域で定義される関数がフーリエ級数で表わされることと結び付けて周期的境界条件の妥当性を主張している．

一方 Klein は後に述べる “Klein の paradox” を論じた論文[38]において，Dirac 方程式では定常波型の境界条件が許されないことを述べているが，周期的境界条件には言及がなく，それは元々念頭にないように見える．

また仁科が Dirac の場の量子化の論文[30]を読んだ時のノート[33][13]には “Fourier 分解は不快．空洞を用いる必要あり” と記されている．恐らくこれも周期的境界条件になじんでいないことの現われであろう．

後に述べる Ig. Tamm の論文[39]では Dirac 電子に対して周期的境界条件が用いられている．しかし Tamm はそれを用いるに当たって Born の周期的な格子の考え方を説明することわり書きを書いている．この論文は1930年に出されたものであるが，やはり周期的境界条件は何のことわりもなしに用いられるほど広く受け入れられた考え方にはなっていなかったようである．

その3：負エネルギー状態への疑問

第3の理由として負エネルギー状態の問題[2][40]がある．Iの2節で述べたように Dirac 方程式の解には，与えられた運動量に対してエネルギー固有値が $\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$ と正の値を取るものと，$-\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$ と負の値を取るものとがある．Dirac の相対論的電子論[8]が出た当時，この負のエネルギー状態の正当な解釈は行えず，これは物理的には意味のないものと見なす見解が一般的であった．実際 Klein-仁科の論文でも “物理的に意味のない負エネルギー固有値” という言葉が使われている．Dirac が空孔理論[41]を出すのは1930年，陽電子の発見によってこれが正当化されるのは1932年になってからであるから，1928年当時上記の見解が取られたのはやむを得

ないことでもあった.

ところで，Diracの散乱理論を使うとすると，中間状態には可能な全ての状態を取る必要がある．ここで負エネルギー状態を捨てることは許されるのであろうか．この点にも疑問を感じてKleinと仁科はDirac流の扱いを避けたのではないかと思われる．尚，この疑問点の解答は，次に述べるWallerとTammの仕事の中で与えられることになる.

2.3 場の量子化を用いた扱い

場の量子化と散乱理論を用いてCompton散乱を扱い，Klein-仁科の公式を再現する仕事は，Klein-仁科の論文が出てから1年余り後にI. Waller[42]とIg. Tamm[39]によって行われた[2]．両者は独立な仕事であるが，Wallerは電子の場は量子化しない方法を用いているのに対して，TammはHeisenberg-Pauliの論文[31]を踏まえて電子の場も量子化した形式を用いている点が異なっている．この計算にあたり，WallerもTammも共に中間状態としては負エネルギーの状態も取り入れることが本質的に重要であることを強調している[2]．特に$h\nu \ll mc^2$の極限においては，散乱波の強度への寄与は専ら負エネルギーの中間状態により与えられ，これから古典的なThomson散乱の公式が得られる，と述べている．こうなるとDirac方程式の負エネルギー状態は物理的に意味のないものとして捨てるという立場は許されないことになる．このように負エネルギー状態の必要性を示す事実は当時1つのparadoxとして受取られた．上記の場合は“Wallerのparadox”[40]と呼ばれている．同じ意味のparadoxとしてもう1つ“Kleinのparadox”[38]がある．これは，階段状のポテンシャル障壁に対して電子が正エネルギー状態で入射する時，障壁内に透過する部分は，ポテンシャル障壁が充分高い場合には負エネルギー状態になることを示したものである．1節で述べたように，磁場による閉じ込めの可能性を検討して明確な結果が得られなかったところから，Kleinは次に静電場による閉じ込めの可能性を検討し，このparadoxを得たのかもしれない．さて，Wallerから仁科宛の2通の書簡が残されているが，この内，1929年5月17日付の手紙[43]には，目下主として散乱を研究している，と書かれている．そして1930年1月25日付の手紙[44]では負エネルギー状態に次のように言及している．“ここしばらく散乱のことをやっており，これが私のhobbyになりつつある．Diracの散乱理論は，負エネルギー状態を正しく考慮に入れると，自由電子の場合についてまさしくあなたとKleinの公式を与える．これはあなたにも興味のあることだろう.”

ところで，この手紙の余白には仁科の返事の下書きが英文で記されている．ここで仁科は“散乱についてのあなたの結果にはたいへん興味がある．ぜひあなたの研究の詳細を見たい．CopenhagenでのHeisenbergの講演を聴いて，私もやはり正しい結果を得るためには負エネルギー状態を考慮に入れなければならないと考えたが，あなたが私達と同じ式を得ることになろうとは予測しなかった．論文が出るのを楽しみにして待っている”と言っている．HeisenbergについてはWallerの論文の脚注にも“公表はされていないが，Heisenberg教授も$h\nu/mc^2 \ll 1$の場合に，古典的な散乱公式は負エネルギーの中間状態により得られることを既に見出している”と述べられているが，仁科がCopenhagenでHeisenbergの講演を聴いたのなら1928年10月以前のはずであるから，このHeisenbergの予見はかなり早かったことになる.

さて，Kleinと仁科にとっては重大な気がかりとなったDirac電子の規格化の問題については，Wallerは気にとめなかったらしく，電子についてはδ関数型の規格化を用いながら，電磁波の波数ベクトルの方は形式上は離散的に扱って計算を進めている．Tammは電子の場と電磁場の両方について周期的境界条件を用いて空間の扱い方に整合性を持たせていることは既に述べた.

Kleinと仁科にとってのもう1つの気がかりの種であった終状態の選び方の問題についてはWallerとTammはどう処理しているかを見ておこう．まずWallerは，与えられた運動量を持つ自由電子の4つの独立な状態として，Klein-仁科と同じ型の4つの解，すなわち，それぞれ$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$の1つずつがゼロに等しい解を採用し，この具体的な形を実際の計算に用いている．しかしその前に4つの状態を選ぶ上での条件として直交性を明示している上に，最後に，散乱波の強度は（この条件を満たしている限り）4つの状態の具体的な形には依存しないことも確かめられる，と付記している.

Tammは規格直交性だけを用いて散乱波の強度を求める計算法を確立しており，4つの独立な状態の具体的な形は計算には用いていない．しかし具体形の例として挙げたものはやはりWallerと同じくKlein-仁科型で，$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$の1つずつが0に等しい4つの解である.

WallerとTammはDiracの散乱理論（時間を含む摂動論）を用いたために直交性の条件に自然に到達したのかもしれない．しかしTammが論文の中で述べている“波動関数ψの4つの成分は4次元ヒルベルト空間のベクトルの成分とみなせる”（文献(39)のp549）という一般的な視点は，Klein-仁科の計算が行われた当時はまだ確立していなかったと思われる．1年余りの間には4成分波動関数の概念的な面にも進歩があった訳で

ある.

なお，Waller と Tamm の理論を空孔理論の立場で考え直しても，簡単な形式的変更を行うだけで，散乱断面積の結果に変わりはない[(2)(40)]．このことは Waller 自身も文献 (42) の脚注に記しており，Dirac も文献 (41) の中で述べている．こうして，Klein-仁科の公式は，場の量子化と空孔理論に立脚する立場からも再現されることが明らかになった．この公式が Dirac 方程式を支持する役割を果たしたことについては前稿 I で触れたが，Waller と Tamm の仕事もその役割を大いに補強した*と言えるだろう．

謝　辞

玉木英彦，島村福太郎，竹内　一諸氏には，筆者を仁科資料の調査・整理のグループに加えていただき，資料に触れる機会を与えて下さったこと，及び数々の貴重な御指導，御助言をいただいたことに対して深く感謝の意を表します．

江沢　洋氏には，原稿を丁寧に読んでいただき，数多くの懇切かつ適切な御指摘をいただいたことに深く感謝の意を表します．

Gösta Ekspong 氏には，文献 (2) の preprint を送っていただいたことに厚くお礼を申し上げます．

理化学研究所・史料室には，仁科資料を利用させていただいたことに感謝いたします．

文献と注

文献の番号は前稿 I からの通し番号とし，(1) から (27) までは本稿 II で引用したものだけを掲げる．

(1) 玉木英彦，島村福太郎，竹内　一，矢崎裕二：日本物理学会年会講演
i) 1984. 4. 4 "コペンハーゲン学派と仁科芳雄 IV ; クライン—仁科の公式導出の過程" 第 39 回年会講演予稿集，4, p 217
ii) 1985. 4. 1 "コペンハーゲン学派と仁科芳雄 V ; クライン—仁科の公式導出の過程 (2)" 第 40 回年会講演予稿集，4, p 268
iii) 1986. 3. 29 "Klein-仁科の公式に関連する仁科資料" 第 41 回年会講演予稿集，4, p 297

(2) G. Ekspong : "Oskar Klein and Yoshio Nishina" Invited paper to the Yoshio Nishina Centennial Symposium, December 5-7, 1990, Tokyo
この論文で Ekspong は Klein の生涯，Compton 効果についての歴史的概観，Klein-仁科の共著論文及び仁科単名論文の仕事の内容と背景，これ等の仕事とその後の発展との関わりについて興味ある解説を行っている．前稿 I 及び本稿 II で取り上げる散乱のスピン偏極への依存性，負エネルギー状態の問題，Dirac による場の量子化の仕事，場の量子化を用いて Compton 散乱を扱った Waller, Tamm の仕事等は，視点は必ずしも同じではないが，この Ekspong の論文においても論じられている事柄である．尚，この論文は上記シンポジウムの Proceedings : M. Suzuki and R. Kubo (Eds.), *Evolutionary Trends in the Physical Sciences*, Springer Proceedings in Physics 57, Springer-Verlag (1991)，の pp. 25-34 に収録されている．

(6) W. Gordon : *Zs. f. Phys.* 40 (1927) 117

(7) O. Klein : *Zs. f. Phys.* 41 (1927) 407

(8) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* 117 (1928) 610

(10) O. Klein, Y. Nishina : *Zs. f Phys.* 52 (1929) 853

(13) 江沢　洋："理論：量子力学形成の現場で学ぶ"，『日本物理学会誌』45 (1990, No. 10, 仁科芳雄生誕百年記念特集号) 744
前稿 I 及び本稿 II で取り上げる資料の一部は，この文献においても引用と解説が行われている．

(14) Y. Nishina : *Zs. f. Phys.* 52 (1929) 869

(16) O. Klein : "To the Memory of Yoshio Nishina" 朝永振一郎の依頼に応えて 1975 年 2 月仁科記念財団に寄せられた手記．小泉賢吉郎訳 "仁科芳雄の想い出"：『自然』1975 年 10 月号 p 52，また一部修正の上『日本物理学会誌』45 (1990, No.10,) 720 に転載．さらに，玉木英彦，江沢洋編『仁科芳雄——日本の原子科学の曙』(みすず書房，1992) の pp. 93-97 に収録

(23) O. Klein より仁科芳雄宛書簡，Copenhagen 発，1928. 12. 2. 資料番号 [358]，仁科記念財団 Publication No. 27 *Supplement to the Publications No. 17, No. 20, No. 21* (1986)，pp 2-4 に収録

(24) O. Klein より仁科芳雄宛書簡，Copenhagen 発，1928. 10. 27. 資料番号 [173-2]，仁科記念財団 Publication No. 27, p 1 に収録

(28) 竹内　一，廣政直彦："仁科芳雄年表"，『日本物理学会誌』45 (1990, No. 10) 770. 尚，これを実質的に含んだ，より詳しい年表が上の (16) に記した玉木英彦，江沢　洋編『仁科芳雄——日本の原子科学の曙』(みすず書房，1992) の pp. 273-300 に掲載されている．

(29) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* 112 (1926) 661

(30) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* 114 (1927) 243

(31) W. Heisenberg, W. Pauli : *Zs. f Phys.* 56 (1929) 1

(32) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* 114 (1927) 710

(33) 仁科記念室資料
I の 4 節に述べた理研の「3 号館資料」については資料番号が確定したが，仁科財団所蔵の仁科記念室の資料については未だ資料番号を付ける段階に至っていない．

(34) P. Jordan, O. Klein : *Zs. f. Phys.* 45 (1927) 751

(35) M. Born : "Atomtheorie des festen Zustands (Dynamik der Kristallgitter)" (1922) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B. G. Teubner, Leipzig (1904-1922), V Physik, 3teil, 25

(36) M. Born : *Zs. f. Phys.* 38 (1926) 803

* 江沢　洋氏の御指摘による．

(37) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* 112(1926)661
(38) O. Klein : *Zs. f Phys.* 53(1929)157
(39) Ig. Tamm : *Zs. f. Phys.* 62(1930)545
(40) 江沢　洋：「空孔理論」[岩波講座・現代物理学の基礎（第2版）3『量子力学I』（岩波書店，1978）の§7.7]ここには負エネルギー状態の問題，Wallerのparadox，Kleinのparadox，空孔理論などの核心が懇切明瞭に解説されており，物理学史的な視点からの考察も織り込まれていて興味深い。
(41) P. A. M. Dirac : Proc. Roy. Soc. 126(1930)360
(42) I. Waller : *Zs. f. Phys.* 61(1930)837
(43) I. Waller より仁科芳雄宛書簡，Upsala発，1929. 5. 17. 資料番号 [400]
(44) I. Waller より仁科芳雄宛書簡，Upsala発，1930. 1. 25. 資料番号 [469]
(45) 矢崎裕二：『科学史研究』第II期31　No. 182 (1992)81

Résumé

How Was the Klein-Nishina Formula Derived? (II)
——based mainly on the source materials of Y. Nishina in RIKEN——

Yuji YAZAKI

The first half of the present paper describes the efforts of Klein and Nishina to solve the problem of final spin states of electron in Compton scattering. It can be summarized as follows.

They tried to judge the appropriateness of two independent final states by their physical meaning, probably because the orthogonality condition was not yet well-defined for Dirac electron. They chose the solutions of Dirac equation of which the first and the second component was equal to zero respectively. They thought this choice appropriate, according to their surmise that those solutions were the weak field limit of the eigenfunctions in a static magnetic field. They made considerable efforts to find such eigenfunctions, but their conclusion was ambiguous. Anyway, they tended to regard the above surmise not so sound and felt some uncertainty in their choice of two final states. Finally, Klein devised the method to derive the states from solutions of electron at rest by Lorentz transformation. Thus the pending problem was solved.

In conclusion, the greatest problem for Klein and Nishina throughout the work was the physical meaning of Dirac spin states and how to treat them. They were essentially new and the basic idea about them was not well-established at that time.

The rest of the present paper discusses the reasons why they adopted the semi-classical approach of treating radiation, despite of the fact that Dirac's field quantization method was already available. Three points are mentioned.

1. Klein was the major founder of the semi-classical way.
2. They must have hesitated to use discrete wave vectors for Dirac electron, since the intuitively appealing boundary condition [$|\psi|^2=0$ at the boundary] could not be applied for it.
3. They might have doubts about including negative energy solutions in the intermediate states, summations over which become necessary in the Dirac theory of transition probability.