# Klein-仁科の公式導出の過程 (I)*
## ——理研の仁科資料**を中心に——

矢 崎 裕 二***

### はじめに

X 線の電子による散乱（Compton 散乱）において，散乱された X 線の波長が散乱角に応じて変化する現象が Compton 効果[2]である．A. H. Compton[3]は X 線に光量子説を適用し，光量子と電子についてのエネルギー・運動量保存則を用いて散乱過程における波長のずれが説明できることを示した．これによって Compton 効果は光量子説を支える重要な実験事実の一つに数えられることになる．この散乱波の強度の角分布を与える式についてはComptonも文献 (3) の中で，相対論とドップラー効果を用いた一つの試論を展開しており，ある程度実験とも一致する結果を出している．その後 Breit[4]は前期量子論における対応原理を用いてこの問題を論じ，量子力学による扱いと同じ結果を得た．

量子力学の登場以後，その枠組の中で Compton 散乱を論じたものとしては，最初に Dirac[5]，次いで Gordon[6]の理論がある．いずれも Compton が仮説として提出した，光量子と電子の間の運動量・エネルギー保存則を量子力学を用いて演繹的に導き出した上，散乱波の強度の角分布を与える式も導出したもので，両者の方法は異なるが結果は一致している．また Klein[7]は電子と電磁場の相互作用を量子力学においていかに扱うべきかという，より一般的な問題を主眼としながら Compton 散乱も取り上げている[2]．但し Compton 散乱については運動量・エネルギー保存則を導くにとどまり，散乱波の強度までは求めていない．文献 (6), (7) においては，相対論的な効果を無視できない領域であるところから，電子が従う方程式としてはいわゆる Klein-Gordon 方程式が採用されている．文献 (5) において用いられた電子の運動量とエネルギーの間の関係もこれと同等である．

さて，Klein と仁科は，Dirac の相対論的電子論[8][9]が出されて間もなく，Compton 散乱波の強度の問題を，この Dirac 方程式によって扱う計算を行い，有名な Klein—仁科の公式[10][11]を導くことに成功した．この公式は現在でも揺るぎのない位置を保ち，いろいろな場面に適用されているが，Klein と仁科がこの計算に取り組んだ時点においては，これが Dirac 方程式自体の正否を検証する一つの手掛りとなることも意図されていた．それは Klein—仁科の論文[10]の序にも述べられている．

Bohr は 1934 年の仁科宛の手紙[12][13]の中で，当時を振り返り，この点について次のように述べた．“この公式が獲得した実験との驚くべき一致は，Dirac の理論が一見多くの重大な困難に直面しているように見えたあの時に，その理論の本質的な正しさに対する主要な支えとなった．”

また Ekspong は文献 (2) の中で，この公式を確証するための実験が，同時に陰陽電子対創生と陽電子の消滅という，当時は未知の新たな現象を示唆することにもなった経緯を論じている．

本稿 I では Klein—仁科の理論を概観した後，主として理研の仁科資料を基にして彼等の取り組みの過程を考察する．

### 1. Klein—仁科に先行する諸理論

まず始めに Compton が提唱したエネルギー・運動量保存則と，散乱に伴う振動数の変化を与える式を書き下しておこう．この保存則は Compton 及び Breit の理論

* 1991 年 5 月 27 日受理　本稿 I 及び続稿 II の要旨は玉木英彦，島村福太郎，竹内一踏氏と筆者の連名で，1984, 1985, 1986 年の日本物理学会・年会において報告した[1]．その後仁科記念財団における資料整理が進み，理研の仁科資料については資料番号が確定したのを機会に，上記を補足，詳述して論文とした．

** この資料を利用させていただいたことに対して理化学研究所・史料室に感謝する．

*** 東京都立上野高等学校

においては基本的な仮説として位置付けられる.

以後, Klein-仁科の論文[10]の記法に合わせて, プランク定数/$2\pi$ を $h$ とし, $2\pi\times$振動数を $\nu$, $\nu'$ などであらわすことにする. また電子の質量を $m$, 電荷を $-e$, 光速を $c$ とする.

振動数 $\nu$, 進行方向 $\boldsymbol{n}$ の光量子のエネルギーは $h\nu$, 運動量は $(h\nu/c)\boldsymbol{n}$ で与えられる. 散乱の前後の光子の振動数と進行方向をそれぞれ $\nu$, $\boldsymbol{n}$; $\nu'$, $\boldsymbol{n}'$ とし, 電子の運動量は散乱の前後でそれぞれゼロ; $\boldsymbol{p}$ として, エネルギー・運動量保存則を書き下すと

$$\begin{aligned} &h\nu+mc^2=h\nu'+\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} \\ &(h\nu/c)\boldsymbol{n}=(h\nu'/c)\boldsymbol{n}'+\boldsymbol{p} \end{aligned} \qquad (1\text{—}1)$$

これより入射方向と角 $\theta$ をなす方向に散乱される $X$ 線の振動数は

$$\nu'=\frac{\nu}{1+\alpha(1-\cos\theta)}, \quad \left(\alpha=\frac{h\nu}{mc^2}\right) \qquad (1\text{—}2)$$

となる.

### 1.1 Dirac の理論

Dirac[5]は彼の創案した $q$-number 代数の方法を用いて初めて Compton 散乱を量子力学によって扱った. 彼はまず始めに量子力学的多重周期系の一般論を展開する.

ここでは話を簡単にするために自由度1の系を取って説明したい. 周期系は次の性質によって定義される (この周期系は電子系だけを想定しており, 電磁場まで含めたものではない).

1) この系は正準変数 $J$ と $w$ ($[w, J]=ih$) で記述される.
2) ハミルトニアンは $J$ のみの関数 $H(J)$ で表わされる.
3) 座標 $x$, 運動量 $p$ は共に $\sum_\alpha C_\alpha(J)^{i\alpha w}$ ($\alpha$ は整数) の形に展開できる.

上の展開に現われた $e^{i\alpha w}$ の項は $J$ が $c$ 数 $J'$ という値を取る状態から $J'-\alpha h$ という値を取る状態への遷移に関わる項であり, その遷移に伴って放出される輻射の振動数は $\nu'=[H(J')-H(J'-\alpha h)]/h$ である ($H(J')$ は, $H(J)$ の $J$ に $c$ 数 $J'$ を代入したもの). $x$ 軸に垂直な方向で観測されるこの輻射の強度は, 位置座標を展開した式 $x=\sum_\alpha C_\alpha(J)^{i\alpha w}$ の振幅 $C_\alpha(J)$ の $J$ に $c$ 数 $J'$ を代入した $C_\alpha(J')$ を, 古典論の双極子輻射の強度の式における電荷の変位の振幅に代入して

$$I=\frac{e^2\nu'^4}{8\pi c^3r^2}|C_\alpha(J')|^2$$

によって得られるとする. ここに $r$ は粒子の位置と観測点のあいだの距離である. これが Dirac の理論の基本的な仮定であるが, このように古典論の式に現われる量を量子力学的な代替物で置き換えることによって荷電粒子と電磁場の相互作用の問題を扱うという考え方は, 次に述べる Gordon, Klein の半古典的な扱いと共通する立場である.

以上の一般論を入射電磁波の場の中の電子に適用して Compton 散乱を論じる. 外場による振動項のみを考えると, この電子にも周期系の定義を当てはめることができる. Dirac は彼一流の数学的洞察力を発揮して, 元の変数, $x_i$, $p_i$, $t$, $E$ から散乱を記述する正準変数 $J$ と $w$ を見事に構成して見せた. この $J$ が $J'$ から $J'-h$ に変化する遷移が散乱過程に当たる. そして $\nu'=[H(J')-H(J'-h)]/h$ と $\Delta J=-h$, $\Delta J_2=\Delta J_3=0$ ($J_2$, $J_3$ は $J$ と可換な残りの変数) がまさしく Compton 散乱におけるエネルギー・運動量保存則を表わすことを示した. また放出される輻射 (散乱波) の強度も先の一般論より求められ,

$$I=\frac{e^4}{m^2c^4r^2}I_0\frac{\sin^2\phi}{\{1+\alpha(1-\cos\theta)\}^3} \qquad (1\text{—}3)$$

となる. $I_0$ は入射波の強度, $\theta$ は散乱角, $\phi$ は散乱方向と入射波の電場のなす角である.

### 1.2 Gordon の理論

Gordon[6] の理論は Klein-仁科の仕事と密接な関連をもつので, やや詳しく取り上げることにしよう. これは電子による電磁波の散乱を対応原理にもとづいて扱う方法である. ここで対応原理というのは, 純粋に量子力学の枠組に沿った定式化がなされていない電子と電磁場との相互作用の問題を扱うにあたって, 先ず古典論にもとづく式を書き下し, その中に現われる電荷密度や電流密度を量子力学による表式で置き換えてみる, という指針を意味している. 従って理論の性格としては古典論と量子力学を折衷的に用いたものにあたり, 後に「半古典的扱い」[2][13]とよばれるようになる方法である.

ところで Gordon は, 電磁場中の電子の運動について, 純古典論的な扱いと量子力学による扱いを並行して行い, 電子が作り出す電磁場についての量子力学にもとづく結果が, プランク定数を0に近づける極限において, 純古典論にもとづく結果に一致することを確認している. Gordon はこのことを「対応原理」と呼んでおり, それを半古典的扱いの妥当性の根拠と考えているふしが見えるが, Klein[7]は半古典的扱いの方法自体, すなわち古典電磁気学における表式の中で電荷密度 $\rho$, 電流密度 $\boldsymbol{J}$ を遷移を表わす量子力学的な代替物で置き換えるという基本的な筋道そのものを対応原理的な指針と呼んでいるようである.

Klein-Gordon 方程式: 古典論では, 電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$, $V$ の下での電子の基礎方程式は, 相対論的な Hamilton-Jacobi の方程式

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-eV\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}+\frac{e}{c}A_k\right)^2+m^2c^2=0$$

によって与えられる．Schrödinger が非相対論的な波動方程式を導出したときの方針にならって，上記の Hamilton-Jacobi の方程式において

$$\frac{\partial W}{\partial x_k}\to\frac{h}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad -\frac{\partial W}{\partial t}\to ih\frac{\partial}{\partial t}$$

と置き換え，これを波動関数 $\psi$ に作用させたものが次の Klein-Gordon 方程式である．

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(ih\frac{\partial}{\partial t}+eV\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{h}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{e}{c}A_k\right)^2+m^2c^2\right]\psi=0 \tag{1—4}$$

電荷密度，電流密度：(1-4) の解 $\psi$ と，その複素共役量 $\varphi$ を用いて，$\rho$ と $J$ を次式によって表わす．

$$\rho=\frac{ie}{c^2}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{2ie}{h}V\varphi\psi\right)$$

$$J=\frac{e}{i}\left(\varphi\ \mathrm{grad}\ \psi-\psi\ \mathrm{grad}\ \varphi-\frac{2i}{h}\cdot\frac{e}{c}A\varphi\psi\right) \tag{1—5}$$

これは連続の式 $\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\,J=0$ を満たすので，この $\rho$ が電荷密度，$J$ が電流密度を表わすものと解釈するのである．

電子によって生じる電磁場のポテンシャル：これは電流分布，電荷分布が作る場についての古典電磁気学の遅延ポテンシャルの表式に上記の $\rho$, $J$ を代入して

$$A'=\frac{1}{c}\int\frac{[J]_{t-\frac{R}{c}}}{R}d\tau,\qquad V'=\int\frac{[\rho]_{t-\frac{R}{c}}}{R}d\tau \tag{1—6}$$

によって与えられると考える．これが半古典的扱いの基本的な仮説である．$R$ は体積要素 $d\tau$ と観測点の間の距離である．

Compton 散乱：入射波は直線偏光の平面波として，その電磁ポテンシャルを $\Phi_i=a_i\cos\nu(t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}/c)$ とする ($i=0, 1, 2, 3$ ; $\Phi_0=V$, $\Phi_k=A_k$)．Klein-Gordon 方程式 (1-4) の解は，運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子の解が摂動を受けた形で

$$\psi(\boldsymbol{p})=C(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{h}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}\cdot\left\{1+[O(a_i)の量]\sin\nu\left(t-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)\right\}$$

と求められる．ただし $E$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由電子のエネルギーで，$E=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$ である．$C(\boldsymbol{p})$ は規格化因子で，先の $h\to 0$ の極限における「対応原理の要請」より定まり，$\delta$ 関数型の規格化条件を与えることになる．$\psi(\boldsymbol{p})$ に重みの因子として実数値の $z(\boldsymbol{p})$ を掛けて重ね合わせ，一般解を

$$\Psi=\int z(\boldsymbol{p})C(\boldsymbol{p})\psi(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p}$$

として (1-5) の $\rho$, $J$ の表式に代入する．散乱波の電磁ポテンシャルは (1-6) 式により定まり

$$\Phi_i'=\frac{1}{r}\mathcal{R}\int[O(a_i)の量]z(\boldsymbol{p})z(\boldsymbol{p}')\cdot e^{\frac{i}{h}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')\boldsymbol{r}'-i\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{p}'d\boldsymbol{r}'$$

と書かれる．ここに

$$\nu'=\frac{E+h\nu-E'}{h},$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}+\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{n}-\frac{E+h\nu}{c}\boldsymbol{n}',\qquad \boldsymbol{P}'=\boldsymbol{p}'-\frac{E'}{c}\boldsymbol{n}'$$

である．$\nu'$ の式は光子と電子についてのエネルギー保存則を与え，$\boldsymbol{r}'$ の積分より $\delta(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')$ が出ることにより運動量保存則が導かれる．$\Phi_i'$ の式より，重みの因子 $z(\boldsymbol{p})$, $z(\boldsymbol{p}')$ を考慮して，散乱の素過程 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'$ に伴う電磁ポテンシャルを取り出すことができる．それは

$$\Phi_i'(\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}')=\frac{ec}{2r}\cdot\frac{[O(a_i)の量]}{\sqrt{E\varDelta E'\varDelta'}}\cos\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{1—7}$$

となる．ここに $\varDelta$, $\varDelta'$ は変数変換 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$ に附随する変換の Jacobian である．始状態を $\boldsymbol{p}=0$ として，上記の電磁ポテンシャル (1-7) より散乱波の強度を求めると，Dirac の結論 (1-3) と同じ結果を得る．

## 2. Klein-仁科の理論

Klein-仁科の仕事は，基本的な筋道としては先に述べた Gordon, Klein の方法を踏襲しながら，電子の従う方程式として，新たに出された Dirac 方程式[8]を採用して散乱波の強度を求めたものである．以下にそのあらましを記す．式の番号は，Klein-仁科[10]の論文の番号をそのまま用いて (KN-1) のように書くことにする．

Dirac 方程式：電磁場 ($A$, $V$) が存在する場合について，Dirac 方程式は次のように書かれる．

$$\left[\frac{1}{c}\left(ih\frac{\partial}{\partial t}+eV\right)+\rho_1\left(\boldsymbol{\sigma},-ih\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+\rho_3mc\right]\psi=0 \tag{KN—1}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は4次元のスピン行列のベクトル，$\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ は互いに反可換で，$\boldsymbol{\sigma}$ とは可換な4次元の行列，第2項の (…, …) はスカラー積である (以後，原著者の記法に従って，紛らわしくない場合はこのコンマを省き，スカラー積は ($\boldsymbol{AB}$) のように書く)．波動関数 $\psi$ も4つの成分を持ち，4行1列の行列で表わされる．$\psi$ にエルミート共役な波動関数を $\varphi$ とすると電荷密度 $\rho$, 電流密度 $J$ は次のように与えられる[9]．

$$\rho=-e\varphi\psi,\qquad J=ec\varphi\rho_1\boldsymbol{\sigma}\psi \tag{KN—3}$$

これは連続の式 $\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\,J=0$ を満たす．

自由電子：自由電子の Dirac 方程式は (KN-1) におい

て $A=V=0$ と置いたものであり，その解は

$$\psi_0(p)=v(p)e^{-\frac{i}{h}(Et-(pr))} \qquad \text{(KN—4)}$$

という形に書かれる．ここに $v(p)$ は $r, t$ に依存しない4行1列の行列で

$$\left[\frac{E}{c}+\rho_1(\sigma p)+\rho_3 mc\right]v(p)=0 \qquad \text{(KN—5)}$$

を満たす．$E$, $p$ はエネルギー，運動量であり，相対論的関係 $E^2/c^2=m^2c^2+p^2$ を満たす．注意すべきことは与えられた $p$ に対して E には正，負両方の値が存在し，(KN-5) の解 $v(p)$ としては，一般に正エネルギーの解が2つ，負エネルギーの解が2つあることである．各々の2つはスピン状態についての縮退を表わしている．波動関数の規格化は $\delta$ 関数型の $\int\varphi_0(p)\psi_0(p')dr=\delta(p-p')$ で与えられ，これは $u(p)v(p)=(2\pi h)^{-3}$ を導く．$u(p)$ は $v(p)$ にエルミート共役な1行4列の行列である．運動量 $p=0$ の場合には，(KN-5) の正エネルギーの解 $v(0)$ として $\sigma_z$ の $\pm1$ の固有状態

$$v^+(0)=(2\pi h)^{-3/2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v^-(0)=(2\pi h)^{-3/2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

の2つを選ぶことができる．$p\neq0$ の場合の解は，Lorentz 変換のユニタリ演算子 $S^{-1}(p)=\alpha-i\beta\rho_2(\sigma p)$ を用いて $p=0$ の解から次のように導かれる．

$$v^{\pm}(p)=S^{-1}(p)v^{\pm}(0) \qquad \text{(KN—18)}$$

この Lorentz 変換を用いる方法は，Klein が苦心の末に案出したもので，続稿 II に述べる「終状態の問題」において重要な意味をもつことになる．

<u>輻射場の中での Dirac 方程式の解</u>：ポテンシャル

$$A=ae^{i\nu(t-(nr)/c)}+\text{c. c.} \qquad \text{(KN—22)}$$

で記述される入射輻射場の下での摂動解を，次のように運動量 $p$ の自由電子の解 $\psi_0(p)$ がこの入射波の場によって変更を受けた形に書き表わす．

$$\psi(p)=\{1+g(p)e^{-i\nu(t-(nr)/c)}+\bar{g}(p)e^{i\nu(t-(nr)/c)}\}\psi_0(p) \qquad \text{(KN—23)}$$

(この式の第2項の $\bar{g}$ は $e^{-i\nu(t-(nr)/c)}$ の係数というだけで，$g$ の複素共役という意味ではない.)

Dirac 方程式を2階の方程式に書き変え，$\psi$ に (KN-23) の形を代入して，場の振幅 $a$ について1次の近似で $g(p)$, $\bar{g}(p)$ を求めると

$$g(p)=\{(ap),\ \sigma \text{ と } a,\ \rho_1\sigma \text{ と } a \text{ を含む3項の和}\} \qquad \text{(KN—25)}$$

という形に定められる．$\bar{g}(p)$ についても同様である．

<u>散乱波の場</u>：まず先の摂動解を重ね合わせて，一般解を

$$\Psi=\int\psi(p)dp, \qquad \Phi=\int\varphi(p)dp \qquad \text{(KN—28)}$$

と書く．これは前の Gordon の場合に見たように，遷移の素過程 $p\rightarrow p'$ に対応する項を取り出すために必要な形式である．この一般解に伴う電流密度は (KN-3) により

$$J=ec\Phi\rho_1\sigma\Psi=ec\iint\varphi(p)\rho_1\sigma\psi(p')dpdp' \qquad \text{(KN—29)}$$

となる．$\varphi(p)$, $\psi(p')$ に (KN-23) の表現を代入して，入射波の振幅 $a$ について1次の項を取ると，これが入射波のために生じた電流密度で，散乱波の場の発生源になる．散乱波のベクトル・ポテンシャルは，古典電磁気学の遅延ポテンシャルの表式 (1-6) に上記の電流密度を代入して得られる．これが対応原理的な方法の要目であることは先に見た通りである．ここから Gordon の場合と同様にして光子と電子についてのエネルギー・運動量保存則の成立が導かれ，散乱の素過程 $p\rightarrow p'$ に伴うベクトル・ポテンシャルは

$$A(p,p')=\frac{e(2\pi h)^3}{r\sqrt{\Delta\Delta'}}\{e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right)}u(p)[\rho_1\sigma g(p')+f(p)\rho_1\sigma]v(p')+\text{c. c.}\} \qquad \text{(KN—36)}$$

で与えられる．ここに $f(p)$ は $\bar{g}(p)$ のエルミート共役量，$\Delta$ と $\Delta'$ は Gordon の場合と同様に現われる変数変換の Jacobian である．散乱波の磁場は $H(p,p')=rot\,A(p,p')=\frac{i\nu'}{c}A(p,p')\times n'$ となる．ここで電子の始状態の運動量を $p=0$ として，$H(0,p')$ を $H_0$ と書く．(KN-36) に現われる $g(p')$, $f(p)$ は (KN-25) に与えられたように $\sigma$, $\rho_1\sigma$ という項を含み，(KN-36) はこの $g(p')$, $f(p)$ にさらに $\rho_1\sigma$ を掛けたものが $u(p)$ と $v(p')$ で狭まれるという構造を持つ．そして $\sigma$ についての演算規則と $u(p)$, $v(p')$ が満たす方程式より，結局 (KN-36) の各項は全て $d=u(p)\,v(p')$ と $s=u(p)\sigma\,v(p')$ 及びその複素共役量 $\bar{d}$, $\bar{s}$ で表わされることが示され

$$H_0=[d, s \text{ について1次の項の和}]e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}\right)}+\text{c. c.} \qquad \text{(KN—44)}$$

という形を取る．

<u>散乱波の強度の計算</u>：散乱波の強度は Poynting ベクトルの時間平均として次式で与えられる．

$$I=\frac{c}{4\pi}[E_0\times H_0]_{\text{時間平均}}=\frac{c}{4\pi}[H_0^2]_{\text{時間平均}}$$

この $H_0^2$ の計算には $d$, $s$ と $\bar{d}$, $\bar{s}$ の双1次の積の計算が必要になる．ところで先に述べたように電子の運動量 $=p'$ の終状態としては，スピンについての縮退のために独立な状態が2つある．従って特定のスピン状態だけに注目するのでなければ，$H_0^2$ の計算においてはこの2つの終状態からの寄与の和を取る必要がある．Klein-仁科の論文においては，この点は次のように処理

されている．(KN-18) に示された2つの解 $v^{\pm}(p')$ を任意の位相 $\delta_1$, $\delta_2$ を附随させて重ね合わせ

$$v(p')=v^{+}(p')e^{-i\delta_1}+v^{-}(p')e^{-i\delta_2}$$

とする．そうした上で $d$, $s$ と $\bar{d}$, $\bar{s}$ の双1次の積の計算において位相 $\delta_1$, $\delta_2$ についての平均を取る．これは結局2つの独立な終状態 $v^{+}(p')$ と $v^{-}(p')$ の各々からの寄与の和を取ることにあたる．位相の平均を取ると，必要な計算規則が次のよううな形に導かれる．

$$\begin{cases}\overline{(BS)(C\bar{s})}=\gamma\{(BC)+il\cdot(B\times C)\} \\ \overline{(BS)\bar{d}}=\overline{d(B\bar{s})}=\gamma(lB),\ \text{他}\end{cases} \quad \text{(KN—56)}$$

ここに $B$, $C$ は任意の定数ベクトル，$l$ は電子の始状態のスピンの向きを表わす単位ベクトルである．また，全体にわたる上線は位相についての平均をあらわし，$d$ と $S$ についている上線は複素共役をあらわす．これ等を用いて $H_0^2$ を求める代数計算を行うと，入射波が直線偏光の場合について次の結果が得られる．

$$\overline{H_0^2}=\frac{e^4}{m^2c^4r^2}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3\left\{\left(\frac{\nu}{\nu'}+\frac{\nu'}{\nu}\right)\varepsilon^2-2(n'\varepsilon)^2\right\} \quad \text{(KN—58)}$$

$\varepsilon$ は入射波の電場の振幅であり，$n'$ は散乱方向である．散乱角を $\theta$, 散乱方向と入射波の偏りの方向とのなす角を $\phi$ とすると (1-2) で与えられた

$$\nu'=\nu/\{1+\alpha(1\text{-}\cos\theta)\}$$

を用いて，散乱波の強度 $I$ は

$$I=I_0\frac{e^4}{m^2c^4r^2}\cdot\frac{\sin^2\phi}{(1+\alpha(1-\cos\theta))^3}\cdot\left[1+\alpha^2\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\phi(1+\alpha(1-\cos\theta))}\right] \quad \text{(KN—59)}$$

となる．$I_0$ は入射波の強度 $(c/4\pi)\,2\varepsilon^2$ である（この因子2は，入射波の電場が $\varepsilon[e^{i\nu(t-(nr)/c)}+e^{-i\nu(t-(nr)/c)}]$ と書かれるために生じた)．(1-3) 式と比較するとわかるように，Dirac, Gordon の理論とのちがいは最後の [ ] 内の第2項が付加されるところである．(これを光子の微分散乱断面積の形に書き直すには $(I/h\nu')/(I_0/h\nu)$ を考えればよい．結果は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^4}{m^2c^4}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2\left\{\left(\frac{\nu}{\nu'}+\frac{\nu'}{\nu}\right)-2(n'e_0)^2\right\}$$

となる．これはさきに電子のスピンについて和を取った結果を，更に散乱光子の偏りについて和を取った式であるから[2][13], (KN-59) を導いた対応原理的な方法は implicit にそのような手続きを含んでいたことになる.)

### 3. 仁科単名論文

仁科は，Klein-仁科の公式を導く Klein との共同の仕事に続いて，その論文の続編にあたる単名論文[14][15]を出している．これは散乱電磁波の偏りに関するものである．電子のスピンに考え及ばなかった古典論（Thomson 散乱）によれば，直線偏光で入射した電磁波は電子によって散乱された後もやはり直線偏光をなし，この点は Dirac, Gordon の理論でも同様である．しかし Dirac 方程式を用いた Klein-仁科の結果によると，入射波が直線偏光でも散乱波は一般に楕円偏光になり，しかも2つの互いに incoherent な楕円偏光が生じることになる．この2つの各々は，電子の互いに独立な2つの終状態への遷移に対応して生じる．この点は Dirac, Gordon 理論からの帰結と明かに異なるので，実験とつき合わせれば Klein-仁科の理論，更には Dirac 方程式そのものの妥当性を確認できる可能性がある．そのために仁科は当時行われていた実験の条件に合わせて，直角方向に2度散乱を受けた電磁波の強度分布を Klein-仁科の仕事の中の結果をもとにして計算した．

まず Klein-仁科の共著論文の中の散乱波の磁場の表式 (KN-44) を，2つの incoherent な楕円偏光成分に分離して次の形に書き下す．(式の番号は文献 (14) に従う)

$$H_0\propto(A-iB)e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}+\delta_1\right)}-(D+iC)e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}+\delta_2\right)}+\text{c. c.} \quad \text{(N—2)}$$

$\delta_1$, $\delta_2$ は任意の位相で，2節で述べたように電子の終状態を $v^{+}(p')e^{i\nu'\delta_1}+v^{-}(p')e^{i\nu'\delta_2}$ と置いたところから出てきたものである．散乱波の電場 $E_0=H_0\times n'$ も同様に書き下せる．

$$E_0\propto(A'-iB')e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}+\delta_1\right)}-(D'+iC')e^{i\nu'\left(t-\frac{r}{c}+\delta_2\right)}+\text{c. c.} \quad \text{(N—3)}$$

次に，入射波が楕円偏光のときの散乱波の磁場の表式を，やはり (KN-44) に基づいて書き下す．すなわち入射波の電場を

$$E=(\varepsilon_a+i\varepsilon_b)e^{i\nu\left(t-\frac{(nr)}{c}\right)}+\text{c. c.} \quad \text{(N—5)}$$

とするのである．このときの散乱波の強度は電子の始状態のスピンの向き $l$ に依存する．この点は入射波が直線偏光の場合と異なるところであるが，もしも $l$ についての平均を取るなら，Klein-仁科の共著論文の (KN-59) 式に与えられた直線偏光入射波の場合の強度の表式において入射波の電場のベクトル $\varepsilon$ にそれぞれ $\varepsilon_a$ と $\varepsilon_b$ を代入したものの単純な和を取ればよいことが示される．こうして楕円偏光入射波の場合の強度の表式として次式を得る．

$$I=\frac{e^4}{4\pi m^2c^3r'^2}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^3}\times\left\{\frac{2+2\beta+\beta^2}{1+\beta}(\varepsilon_a^2+\varepsilon_b^2)-2[(n''\varepsilon_a)^2+(n''\varepsilon_b)^2]\right\} \quad \text{(N—7)}$$

但し $\beta=(h\nu/mc^2)(1-(\boldsymbol{nn}''))$，$\boldsymbol{n}$ は入射方向，$\boldsymbol{n}''$ は散乱方向である．

最後に，実験で用いられる状況に合わせて，具体的に次のような場合について2重散乱を受けた後の電磁波の強度を求める．すなわち $x$ 軸に沿って入射した直線偏光平面波が $y$ 軸方向に散乱され，$y$ 軸上で第2の電子によって2度目の散乱を受けたものを $xz$ 面内で観測する場合を考える．第1の散乱による2つの incoherent な楕円偏光の電場は先の (N-3) 式で決まる．この各々を (N-7) 式の $\varepsilon_a$, $\varepsilon_b$ に代入し，和を取れば第2の散乱波の強度が得られる．1次の直線偏光入射波の偏りの方向について平均を取った上での最終的な結果は

$$I_t=\frac{e^8}{2m^4c^8r^2r'^2}\cdot\frac{I_0}{(1+2\alpha)^3}\cdot\left\{\sin^2\Theta+\frac{\alpha^2(2+4\alpha+3\alpha^2)}{2(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\right\} \qquad \text{(N—14)}$$

となる．$\Theta$ は観測方向と $z$ 軸のなす角，$r$, $r'$ は第1の電子と第2の電子及び第2の電子と観測点の間の距離である．Dirac, Gordon の理論から導かれるのは (N-14) 式の｛　｝の中の第1項のみを取ったものである．仁科の結果はこれに $\Theta$ に依存しない定数項が付加した形を取っている．

## 4. 理研・仁科資料に見る Klein-仁科の公式導出の過程

先ず，Klein と仁科がこの仕事にとりかかる背景については，Klein 自身の手記[16]及び小泉の論文[17]に具体的な機縁も含めて述べられている．また Ekspong の論文[2]もこの仕事の背景に触れている．Klein について言うなら，彼は以前に Klein-Gordon 方程式にもとづいて Compton 散乱の問題を手掛けていたという経緯もあり，この問題に関心があったのは当然である．一方，仁科にとっても，やはりこの問題は，これまでに彼が取り組んできた研究と無縁ではなかった．そもそも Copenhagen で最初に仁科が取り組んだのはX線の吸収スペクトルの実験的研究であり，以来彼は量子力学の発展に伴って理論に深い関心をよせるようになってからも，X線分光関係の文献には絶えず関心を払っていた．また，1927年の秋からは Hamburg の Pauli のもとに赴き，理論を学びながら，I. I. Rabi と共同でX線の吸収係数についての理論的な研究を行っている[18][13]．このように仁科はX線とは深い関わりがあったのである．帰国を前にして彼には，量子力学を使った本格的な仕事を1つ仕上げたいという気持があったであろうが，Dirac 方程式の出現を大きな興奮をもって迎えた Hamburg にあって[19][13]，これで Compton 散乱の問題を扱うという着想を仁科自身が抱いたとしても不思議ではない．事実，1928年の3月に Copenhagen に戻る前，まだ Hamburg にいた時に仁科は Dirac に手紙を書き，その問題を手掛ける意図を述べている[20]．

さて，この節では，Klein と仁科が実際にこの問題に取り組んだ過程を，主として理化学研究所・史料室所蔵の仁科の資料を基にして跡付けてみたい．この資料は「3号館資料」と呼ばれているが，その由来，発見から調査・整理までの経緯，資料全体の概要については文献 (21), (22) を参照されたい．この「3号館資料」の中には仁科のヨーロッパ留学中の研究メモ，コロキゥム・ノート，書簡その他が含まれているが，そこには Klein-仁科の公式導出に関わるものもあり，この資料から，公式導出の過程において彼等が行った様々な試みや，二人にとっての問題点の所在などを推測することができる．仁科記念財団で行った資料整理に当たり，「3号館資料」の全体に通し番号が付けられた．Klein-仁科の公式に関する資料の番号は [166] から [218] にわたる．この中には仁科単名論文に関わるものも混在しており，また仁科によるメモのほかに Klein によるメモも含まれている．

他に関連資料として Klein から仁科宛の書簡，Skobeltzyn から Jacobsen 及び仁科宛の一連の書簡，Waller から仁科宛の書簡などがある．

### 4.1 Klein-仁科共著論文関係の資料

これについては論文の草稿，原稿にあたる資料が見られない．この点が後に述べる仁科単名論文関係の資料と異なるところである．これは恐らく最終的な論文の原稿の執筆は Klein に任せたためであろう．

しかし，論文の草稿に準ずるものとして，最終段階の散乱波の強度計算に取りかかるところまでの要点をドイツ語の説明文もまじえて記した仁科によるノート（資料番号 [174]）がある．これは続稿 II で述べる終状態の問題について，彼等の考え方の発展を探る上で重要な示唆を含むものである．

次に，Klein と仁科の共著論文[10]に沿って理論の展開を以下の4段階に分け，各段階について注目すべき資料を挙げて行くことにしよう．

1：外部の輻射場による Dirac 方程式の摂動解を求める段階 [(KN-23)～(KN-27) 式]

2：散乱波のベクトル・ポテンシャルの表式を書き下す段階 [(KN-36) 式]

3：散乱波のベクトル・ポテンシャル，散乱波の磁場を $d=u(0)v(p')$, $s=u(0)\sigma v(p')$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ の1次結合の形に整理する段階 [(KN-44) 式]

4：|散乱波の磁場|$^2$，散乱波の強度の表式を求める段階 [(KN-58, 59, 60) 式]

ただし実際の計算メモはこの4つの段階のいずれか1つに分類できるわけではなく，多くの資料は2つないし3つの段階にまたがるものである．それ等が並行して存在するから，同種の計算が何度か反復して行われたわけである．その中には，当然のことながら，計算の誤りや考え方の上での誤りを含むものもある．また，断片的な計算メモの集合で，全体としては1つのまとまった流れをたどれないものもある．

第1段階（Dirac 方程式の摂動解）

資料[197]：計算メモ（第1段階より第3段階の途中まで）　摂動解の求め方は論文に記された方法と本質的には同等であるが，Dirac 方程式を2階の方程式に書き下す手順が少し異なり，これより得られる摂動解の形も見かけ上異なっている．

資料[198]：計算メモ（第1段階より第3段階の途中まで）　摂動解の求め方は論文と同じ方法であるが，一部に符号の誤りが含まれている．

資料[204]：計算メモ（第1段階）　論文と同じ方法が正しく展開されている．

資料[212]：Klein による計算メモ（第1段階）

（i）フーリエ変換による方法．

（ii）論文と同じ方法．

第2段階（散乱波のベクトル・ポテンシャルの表式）

資料[197]：計算メモ（前出）　途中の過程が記され，下記の点を除いて正しく結果が導き出されている．

資料[198]：計算メモ（前出）　$J=ce\varphi(\rho_2\sigma)\psi$ という誤った表式の下に計算が進められている．

先に述べたノート[174]には[197]で求められた結果のみが記されているが，このどちらにおいても2節で述べた変換の Jacobian の因子 $1/\sqrt{\Delta\Delta'}$ が脱落している．この因子は強度を正しく与えるためには必要であり，先に Gordon の論文(6)において現われたものであるが，Klein-仁科の論文(10)では「Gordon に倣ってこの因子を付加する」と述べられている．しかしこれが考慮されている資料は最終段階の計算を行った[196]のみであるところを見ると，かなり後の段階になってその必要性に気付いたのかもしれない．

資料[200]：計算メモ（第2段階から第3段階の途中まで）　電流密度 $J$ の表式として $ce\varphi(\rho_1\sigma)\psi$ の代わりに以前の Klein, Gordon の理論と同様，波動関数とその微分を用いて書き下した式の下にベクトル・ポテンシャルの計算を進めている．Dirac 方程式の場合について，そのような $J$ の表式を導く Klein の計算メモが資料[203]の中に見られる．また同趣旨の仁科による計算メモも断片集合資料[201]，[214]の中に含まれている．この表式を用いることは計算の上で得策ではないが，以前の Klein, Gordon 理論との関連から興味を持ち検討を試みたものであろう．但し上記の諸資料中の $J$ の表式には1つの小さな誤りがある．

第3段階（散乱波のベクトル・ポテンシャル，磁場の具体的な表式）　第2段階のベクトル・ポテンシャルの表式には $\rho_1$, $\sigma$ についてそれぞれ2次までの項が混じっているが，これをスピン演算子 $\sigma$ の性質と自由電子の Dirac 方程式の解の性質を用いて $d=u(0)v(p')$ と $s=u(0)\sigma v(p')$ 及びその複素共役量 $\bar{d}$, $\bar{s}$ の1次結合の形に書き直す技法を扱うところである．

資料[192]：計算メモ（第3段階から第4段階の途中まで）　変換の Jacobian の脱落を除いて正しい表式が導かれている．この結果がノート[174]に採用されている．

資料[197]，[198]，[200]：いずれも計算メモ（前出）　$\sigma_i$ については1次の形に書き直されているが $\rho_i$ が残っており，この点で formulation として中間の段階にとどまるものである．

資料[201-(i)]：[201]は断片的な計算メモの集合であるが，これ等を分類して再編成すると，いくつかのまとまった内容を持つ部分を取り出すことができる．[201-(i)]は第2段階から第4段階の途中までに当たる計算メモである．ここでは上記の $d$, $s$ で表わす方法は取らず，第2段階で求められたベクトル・ポテンシャルの表式(KN-36)に現われる $\rho_1$, $\sigma$ にその行列表現が直接代入されている．こうしてベクトル・ポテンシャルは始状態，終状態の波動関数の成分 $u_3$, $u_4$; $u_1'$, $u_2'$, $u_3'$, $u_4'$ で表わされる．即ちスピン演算子の性質を用いず primitive な計算法を実行したものである．結果は，前述の変換の Jacobian の脱落を除いてベクトル・ポテンシャルを正しく与えている．但しこの方法は見通しが悪く，理論の美学の上からも論文に記された方法に劣る．あくまで初期の試みと言うべきものであろう．

第4段階（|散乱波の磁場|$^2$，散乱波の強度）

第3段階で得られた散乱波の磁場の表式は $d$, $s$ の入り方の異なる8つの項より成り，その上各項がスカラー積やベクトル積を含む複雑な形をしているので，その2乗の計算は極めて煩雑な代数計算になる．文献(2)，(16)にはこの計算を行ったときの逸話が述べられている．

資料[189]：計算メモ（第4段階，中断）　論文と同様の計算に取り掛かりながら，計算の誤りがあり，中断されている．

資料[196]：計算メモ（第4段階，完結）　最終的な強度計算の結果に到達した唯一の資料である．ここでは変換の Jacobian も考慮に入れられている．この計算メモ

を見ると，やみくもに展開して行くだけでは見通しが立たず，途中で $\nu$, $\nu'$（入射波，散乱波の振動数），$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$（入射波，散乱波の進行方向）の間の関係を用いて，展開で生じた各項を適当に変形しながらまとめて行くところに工夫を要したことがわかる．

考え方の上で論文と異なる資料が以下の 2 つである．

資料 [192]：計算メモ（前出）　スピン空間における回転の演算子を考え，強度計算に用いられる (KN-56) と同様な計算規則を，始状態のスピンの向きについて平均を取った結果として導いている．論文の方は電子の始状態のスピンの向き $\boldsymbol{l}$ は固定しておき，入射光が直線偏光の場合に最終的な強度の結果が $\boldsymbol{l}$ に依らないことを示したのであが，この [192] の方法によっても正しい結果を得ることができる．但し [192] は強度の計算に取り掛かりながら途中で中断されている．

資料 [201-(i)]：計算メモ（前出）　前述の primitive な計算法で |ベクトル・ポテンシャル|$^2$ の計算まで行われている．ここでは，終状態のスピンの向きについて平均を取る意図であろうが，電子の終状態の波動関数の 4 成分 $u_1'$, $u_2'$, $u_3'$, $u_4'$ の cross term $u_i' \overline{u_k'}$ $(i \neq k)$ を落とすという手続きが取られている．これは妥当ではない．

尚，Klein から仁科宛の手紙(23)には，仁科が Copenhagen を離れた後，Klein は 2 つの点で改良を行ったことが記されている．1 つは後に述べる終状態の扱い方であるが，もう 1 つは |磁場|$^2$ を計算する上での技術的な改良であり，論文にある $\mu$ という行列（エネルギーが正，静止系でのスピンの $z$ 成分が $+1/2$[または $-1/2$] の状態への射影演算子*）を用いるところである．実際，資料 [196] にはこの行列を用いた方法は採られていない．

以上に述べたところにより，この仕事の各段階における formulation の方法や計算の技法がいろいろな模索の段階を経て発展して行った様子をある程度把え得たと思う．そのような進展は特にスピン演算子の性質を用いる技法とスピン状態の扱い方に関連したところにはっきりと認められる．

静磁場中の Dirac 方程式の解

論文の中では取り上げられていないが，Klein と仁科は静磁場中の Dirac 方程式の解を求める試みも行っており，それを記した資料が残されている．これについては続稿 II で述べることにする．

実験との比較

Klein-仁科の公式を実験のデータと比較するための数値計算を行った資料もある．当時，実験で用いられたのは RaC の $\gamma$ 線であるが，これはいくつかの波長成分を含んでおり，その各成分の強度比については信頼できる実験のデータが出ていなかったようである．そのために理論と実験との比較が困難である旨が Klein と仁科の *Nature* の論文(11)に記されている．しかし，とにかく当時得られた各波長の値，各波長成分の強度比のデータを基にして，仁科は以下のような数値計算を行っている．

資料 [183]：各波長成分に対する散乱波の強度の角分布

資料 [185]：$\gamma$ 線全体についての散乱波の強度の角分布（Klein-仁科の理論と Dirac-Gordon の理論による値を並記）

資料 [187]：散乱係数と透過減衰率（Klein-仁科の理論と Dirac-Gordon の理論による値を並記）

実験のデータを書き出したメモとしては

資料 [186]：RaC の $\gamma$ 線の強度比のデータと思われるもの

資料 [188]：散乱の角分布と透過減衰率のデータ

また，やはり $\gamma$ 線を用い，散乱波ではなく反跳電子の方の角分布の測定を霧箱によって行っていた Skobeltzyn からも実験のデータや論文のプレプリントも含めた一連の書簡(25)が仁科のもとに送られてきている．

これ等実験との比較に関わる資料については，別の機会に詳しい検討が行われるのを待つことにしたい．

### 4.2 仁科単名論文関係の資料

単名論文であるから当然原稿も仁科自身が書いたので，こちらについては論文の手書き原稿やその準備のためのノート等がある．また，この仕事は，基本的な方法についてはすでに Klein との共同の仕事を通して確立されたものに基づいているので，計算メモにしても模索の過程を示す類のものはなく整然としている．この 2 つの点が Klein-仁科共著論文関係の資料と異なる特徴である．以下に注目すべきものを取り上げて簡単に述べたい．

資料 [167]：*Zs. f. Phys.* の論文(14)の手書き原稿

この原稿には出版された論文と 2 つの点で異なるところがある．第 1 点は，[167] には電子の 2 つの終状態として，1 つはスピンの向きが始状態と同じもの，もう 1 つは反転したものを取る，という意味の記述が見られることである．論文の方ではこのような断定的な表現は避けられている．Klein から仁科宛の手紙(24)(13)から推測すると，この修正は Klein によって行われたらしい．第 2 点は電磁波の，電子による 2 重散乱の扱いにおいて，2 回目の散乱については入射波の振動数が最初と異なることをうっかり忘れた誤りがあり，論文ではこれが訂正されていることである．これについては Klein から仁科宛の手紙(23)(13)の中に，Bohr の提案により C. Møller が仁科の残して行った計算のメモをチェックしてその誤りを発見したので，訂正して投稿した旨が記されている．

* 行列 $\mu$ のこの表現は江沢洋氏の御指摘による．

Klein はここで "a thing one would easily forget" と一言温かい言葉を付け加えている.

資料 [170]: 仁科の *Nature* の論文[15]のタイプ原稿

資料 [175]-(ii)]: 同上　手書き原稿

この2つ同士はほとんど異なるところはないが, 出版された *Nature* の論文と両者の間には小さなちがいが見られる. それは, 原稿では電子のスピンの向きに言及したところが論文では削除されている点である. 尚 *Nature* の論文は上記の M$\phi$ller のチェック以前に投稿されたため訂正が間に合わずに出版されたが, 後に仁科は *Nature* 誌に訂正の記事を出している[26]. この訂正の記事についても時間を節約するため Klein, Bohr 等が仲介役をつとめてくれた. その経緯は Klein から仁科宛の手紙[27][13]から知ることができる.

資料 [177]: 英文の説明入りのノート

論文をまとめる準備のために作られたと思われるノートで, 途中の計算の過程も論文より詳しく記され, 要所に英文の説明が付けられている. 内容は上記資料 [167] とほぼ同様である.

全過程の計算を記したメモが2種類 ([172] と [181]) ある. この2つは条件の異なる計算である.

資料 [172]: 計算メモ (全過程)　　論文と同じく1回目の散乱を行う電子の始状態のスピンの向きをある方向 $l$ に固定しておき, 2回目の散乱を行う電子の始状態のスピンの向きについて平均を取った計算が行われている.

資料 [181]: 計算メモ (全過程)　　電子のスピンの始状態を1回目, 2回目共に $+z$ 方向に固定した計算が行われている. この場合最初の直線偏光入射波の偏りについて平均を取ると [172] と同じ結果を得る. また, 1回目の方を一般に $l$ 方向 (2回目は $+z$ 方向) とした場合も考慮されており, $l$ について平均を取るとやはり [172] と同じ結果が得られる. 論文の中には「より詳しい考察によると1回目, 2回目のどちらの始状態のスピンの向きについて平均を取っても同じ結果を得ることがわかる」と記されているが, [181] の計算はその裏付けとなるものである.

資料 [182]: 計算メモ　　入射波が楕円偏光の場合についての散乱波の強度 (2重散乱ではなく1回の散乱) の計算であるが, 電子のスピンの始状態を $+z$ 方向に固定した場合の計算が行われている. 入射波が直線偏光の場合には散乱波の強度が始状態のスピンの向きに依存しないことは Klein-仁科の共著論文で示されている. しかし入射波が楕円偏光の場合には始状態のスピンの向きに依存した強度が得られる[2]. このことを具体的に示した計算がここで行われている訳である. Klein-仁科の共著論文では脚注に, 続編の仁科による単名論文でその点を詳しく論じる予定であると記されているが, 実は仁科の単名論文ではその点は詳しく論じられず, スピンの向きについて平均を取った結果が (N-7) 式として与えられているのみである. [182] においても, 始状態のスピンの向きを一般に $l$ とした上で $l$ への依存性を示す表式は出されていない. しかし少なくとも $l/\!/z$ の場合についてはは確かにその計算が行われていたことを証拠立てるものとして [182] は重要である. また [182] ではスピンの始状態を $+z$ 方向に固定した場合と $-z$ 方向に固定した場合との平均を取ると上記の (N-7) 式が得られることも示されている.

以上により, 仁科単名論文についても, 電子のスピン状態に関連して, 論文には現われていない試みがいくつか行われていたことが明らかになった. Klein と仁科が最も苦心したと思われる終状態の問題もやはりスピンに関わるものであるが, それについては続稿 II において述べることにする.

## 文献と注


(1) 玉木英彦, 島村福太郎, 竹内　一, 矢崎裕二: 日本物理学会年会講演

i) 1984. 4. 4 "コペンハーゲン学派と仁科芳雄 IV; クライン―仁科の公式導出の過程" 第39回年会講演予稿集, 4, p 217.

ii) 1985. 4. 1 "コペンハーゲン学派と仁科芳雄 V; クライン―仁科の公式導出の過程 (2)" 第40回年会講演予稿集, 4, p 268.

iii) 1986. 3. 29 "Klein-仁科の公式に関連する仁科資料" 第41回年会講演予稿集, 4, p 297.

(2) G. Ekspong: "Oskar Klein and Yoshio Nishina" Invited paper to the Yoshio Nishina Centennial Symposium, December 5-7, 1990, Tokyo.

この論文で Ekspong は Klein の生涯, Compton 効果についての歴史的概観, Klein-仁科の共著論文及び仁科単名論文の仕事の内容と背景, これ等の仕事とその後の発展との関わりについて興味ある解説を行っている. 本稿 I 及び続稿 II で取り上げる散乱のスピン偏極への依存性, 負エネルギー状態の問題, Dirac による場の量子化の仕事, 場の量子化を用いて Compton 散乱を扱った Waller, Tamm の仕事等は, 視点は必ずしも同じではないが, この Ekspong の論文においても論じられている事柄である. 尚, この論文は上記シンポジウムの Proceedings: M. Suzuki and R. Kubo (Eds.), *Evolutionary Trends in the Physical Sciences*, Springer Preceedings in Physics 57, Springer-Verlag (1991). の pp 25-34 に収録されている.

(3) A. H. Compton : *Phys. Rev.* **21** (1923) 483.
(4) G. Breit : *Phys. Rev.* **27** (1926) 362.
(5) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* **111** (1926) 405.
(6) W. Gordon : *Zs. f. Phys.* **40** (1927) 117.
(7) O. Klein : *Zs. f. Phys.* **41** (1927) 407.
(8) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* **117** (1928) 610.
(9) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.* **118** (1928) 351.
(10) O. Klein, Y. Nishina : *Zs. f. Phys.* **52** (1929) 853.
(11) O. Klein, Y. Nishina : *Nature* **122** (1928) 398.
(12) N. Bohr より仁科芳雄宛書簡. Copenhagen 発 ; 1934. 1. 26, 仁科記念財団 Publication No. 20 *Y. Nishina's Correspondence with N. Bohr and Copenhageners ; 1928-1949* (1984) pp 31-33 に収録.
(13) 江沢 洋 : "理論 : 量子力学形成の現場で学ぶ", 「日本物理学会誌」 **45** (1990, No. 10, 仁科芳雄生誕百年記念特集号) 744.
本稿 I 及び続稿 II で取り上げる資料の一部は, この文献においても引用と解説が行われている.
(14) Y. Nishina : *Zs. f. Phys.* **52** (1929) 869.
(15) Y. Nishina : *Nature* **122** (1928) 843.
(16) O. Klein : "To the Memory of Yoshio Nishina"
朝永振一郎の依頼に応えて 1975 年 2 月仁科記念財団に寄せられた手記. 小泉賢吉郎訳 "仁科芳雄の想い出" : 「自然」 1975 年 10 月号 p 52, また一部修正の上「日本物理学会誌」 **45** (1990, No. 10,) 720 に転載. さらに, 玉木英彦, 江沢 洋編「仁科芳雄——日本の原子科学の曙」 (みすず書房, 1992) に収録.
(17) 小泉賢吉郎 : "ヨーロッパ留学時代の仁科芳雄" 「自然」 1976 年 11 月号 p 58.
(18) Y. Nishina, I. I. Rabi : "Der wahre Absorptions-koeffizient der Röntgenstrahlen nach der Quantentheorie" (Verhandl. der Deutsch. Physik. Gesell. 3 Reihe. 9. Jahrg. (1928), 6-9).
(19) 仁科芳雄より N. Bohr 宛書簡. Hamburg 発 ; 1928. 2. 19, 仁科記念財団 Publication No. 21 *Y. Nishina's Letters to N. Bohr, G. Hevesy and others ; 1923-1928* (1985) p 22 に収録.
この手紙の中で仁科は "Dirac's last paper was a great excitement to us here" と言い, Gordon がこれに基づいて水素原子のエネルギー準位を計算して微細構造についての Sommerfeld の式を導出したことなどを述べている.
(20) L. M. Brown, H. Rechenberg "Paul Dirac and Werner Heisenberg——a partnership in science" p. 138, p. 155 in B. N. Krusunoglu, E. P. Wigner ed. *Paul Adrien Maurice Dirac*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987), Chap. 12.
これによと仁科は Dirac 宛, Hamburg 発, 1928 年 2 月 25 日付の手紙の中で「あなたの新理論によって Compton 効果の計算をしたい」と言っている.
(21) 玉木英彦 : "われわれの仁科芳雄研究" 「科学史研究」 第 2 期 **26** No. 163 (1987) 184.
(22) 竹内 一, 矢崎裕二 : "仁科芳雄博士に関する資料の現状" 「日本物理学会誌」 **45** (1990, No. 10) 766.
(23) O. Klein より仁科芳雄宛書簡, Copenhagen 発, 1928. 12. 2. 資料番号 [358], 仁科記念財団 Publication No. 27 *Supplement to the Publications No. 17, No. 20, No. 21* (1986), pp 2-4 に収録.
(24) O. Klein より仁科芳雄宛書簡, Copenhagen 発, 1928. 10. 27. 資料番号 [173-2], 仁科記念財団 Publication No. 27, p 1 に収録.
(25) C. Skobeltzyn より J. C. Jacobsen 宛書簡, Leningrad 発,
1928. 9. 6., 資料番号 [344].
1928. 9. 10., 資料番号 [345].
D. Skobeltzyn より仁科芳雄宛書簡, Leningrad 発,
1928. 9. 23., 資料番号 [346].
1928. 10. 2., 資料番号 [347].
1928. 10. 16., 資料番号 [348].
1929. 2. 24., 資料番号 [379].
D. Skobeltzyn より仁科芳雄宛書簡, Paris 発,
1929. 7. 12., 資料番号 [416].
(26) Y. Nishina : *Nature* **123** (1929) 349.
(27) O. Klein より仁科芳雄宛書簡, Copenhagen 発, 1929. 1. 23. 資料番号 [375], 仁科記念財団 Publication No. 27, pp 4-5 に収録.

**Résumé**

## How Was the Klein-Nishina Formula Derived? (I)
### ——based mainly on the source materials of Y. Nishina in RIKEN——

Yuji YAZAKI

In 1928, O. Klein and Y. Nishina derived a formula for the differential cross section of Compton scattering.

Subsequently, Nishina studied the double Compton scattering for the purpose of bringing out the characteristic light polarization in Dirac's theory of electron which is quite distinct from that of the classical theory of spinless electron, and also from that of the theory based on Klein-Gordon equation.

In the present paper, a brief account of these two works is given. How they derived the formulas is then analyzed, based mainly on the source materials of Nishina preserved in the Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN).

It is shown that various attempts were made, not all of which were explicitly described in their papers. For instance, Klein devised a different method to find the solution of Dirac equation in the presence of electro-magnetic radiation. They also tried to calculate the current density induced by incident light in another way. A more concrete way of calculation using an explicit representation of Dirac matrices was adopted in an early stage. Different methods of treating final spin states of electron were tried. Considerable efforts were made to find the solution of Dirac equation in a static magnetic field, also. Nishina performed calculations for the scattering of elliptically polarized light in more detail than he presented in his paper.

It is to be noted that in the course of their works, significant improvements had been made in their methods of treating spin operators and spin states of electron.