

第5章 極座標による運動の記述

5.1 極座標系

5.1.1 空間極座標

空間内の点 P は，原点 O からの距離 r ，直線 OP と z 軸の正の部分とのなす角 θ ，及び，点 P の xy 平面に投影した点を P' として，直線 OP' と x 軸の正の部分とのなす角を反時計まわりに測った φ で表すことができる。

$$(x, y, z) \iff (r, \theta, \varphi)$$

これを 空間極座標 という (図 5.1)。

座標 x, y, z と r, θ, φ のあいだには次の関係がある

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (5.1)$$

3つの座標 r, θ, φ と空間内の一つの点を一対一に対応させるため，座標の値の取り得る範囲を

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (5.2)$$

と制限する。逆に， r, θ, φ は，座標 x, y, z によって次のように表せる。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}. \quad (5.3)$$

極座標の単位ベクトル ベクトル \overrightarrow{OP} 向きの単位ベクトルを e_r ，それに直交して $\varphi =$ 一定で θ が増加する向きの単位ベクトルを e_θ ，両単位ベクトルに直交して φ が増加する向きの単位ベクトルを e_φ とする (図 5.1 参照)。これらの単位ベクトルは互いに直交しており (直交座標系である)，スカラー積に対して次の関係式が成り立つ。

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\varphi \cdot e_\varphi = 1, \quad e_r \cdot e_\theta = e_\theta \cdot e_\varphi = e_\varphi \cdot e_r = 0. \quad (5.4)$$

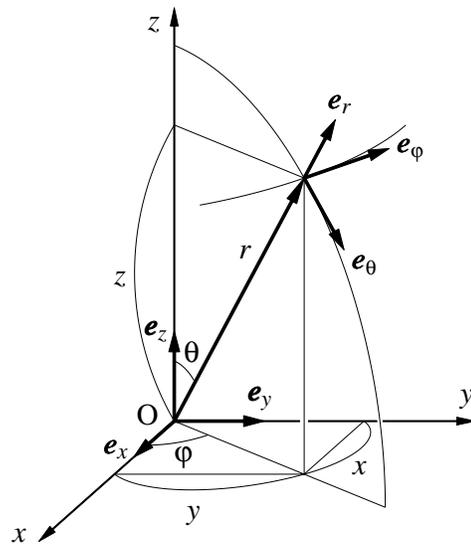


図 5.1: 空間極座標

任意のベクトルの極座標表現 任意のベクトル A は極座標系の3つの単位ベクトルの線形結合で表すことができる

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\varphi e_\varphi. \quad (5.5)$$

ここで、各成分はベクトル A と極座標系の単位ベクトルとのスカラー積

$$A_r = e_r \cdot A, \quad A_\theta = e_\theta \cdot A, \quad A_\varphi = e_\varphi \cdot A \quad (5.6)$$

で与えられる。空間極座標成分 A_r, A_θ, A_φ と直角極座標成分 A_x, A_y, A_z とのあいだには、以下に示す単位ベクトルのあいだの関係式 (5.9) と全く同じ関係が成り立つ。

2つのベクトル A と B を空間極座標で

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\varphi e_\varphi, \quad B = B_r e_r + B_\theta e_\theta + B_\varphi e_\varphi \quad (5.7)$$

とすると、単位ベクトルのスカラー積の性質から、スカラー積は

$$A \cdot B = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi, \quad (5.8)$$

で与えられることがわかる。

直角座標系と空間極座標系の関係 2つの座標系の単位ベクトルのあいだの関係は次のように表せる。

$$\begin{aligned} e_r &= \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y + \cos \theta e_z \\ e_\theta &= \cos \theta \cos \varphi e_x + \cos \theta \sin \varphi e_y - \sin \theta e_z \\ e_\varphi &= -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} e_x &= \sin \theta \cos \varphi e_r + \cos \theta \cos \varphi e_\theta - \cos \theta e_\varphi \\ e_y &= \sin \theta \sin \varphi e_r + \cos \theta \sin \varphi e_\theta + \cos \theta e_\varphi \\ e_z &= \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

関係式 (5.9) は次のようにして求められる (図 5.2)。

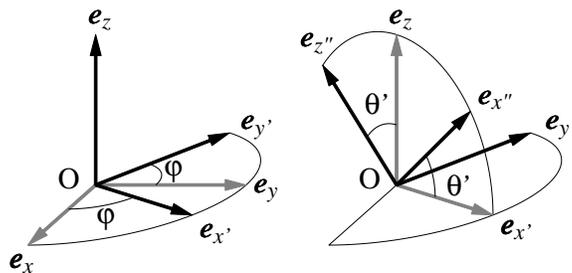


図 5.2: 関係式 (5.9) を求める座標軸の回転

(1) まず, 直角座標系において, z 軸のまわりに角度 φ だけ右向きに回転する。 z 軸のまわりの回転であるから, z 軸の向きは変わらない。新しい x 軸の向き $e_{x'}$, 及び新しい y 軸の向き $e_{y'}$ は, 回転する前の単位ベクトル e_x と e_y の線形結合で表せる。従って, この回転の後の3つの単位ベクトルは, 行列の形にまとめて

$$\begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

と書ける。

(2) 次に, 新しい y' 軸のまわりに角度 $\theta' = \theta - (\pi/2)$ だけ右向きに回転する。ここで,

$$\sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta, \quad \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta \quad (5.12)$$

に注意する。この回転によって $(e_{x'}, e_{y'}, e_z)$ は $(e_{x''}, e_{y'}, e_{z''})$ に移る。回転による単位ベクトルの変換を, 上と同様に行列で表すと

$$\begin{pmatrix} e_{x''} \\ e_{y'} \\ e_{z''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_z \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

となる。

(3) その結果, 新しい x 軸は r の向きに一致し, 新しい y 軸は φ が増加する向きに, 新しい z 軸は θ が減少する向きに一致する。すなわち, $e_r = e_{x''}$, $e_\varphi = e_{y'}$, $e_\theta = -e_{z''}$ となる。変換行列の形では

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x''} \\ e_{y'} \\ e_{z''} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

である。

3つの変換を合わせて (5.9) が得られる。逆変換は, 3つの変換の逆行列を逆の順序で作用して得られる。

5.1.2 平面極座標

座標 x, y は r, φ によって

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (5.15)$$

と表され, 変数が取る値の範囲を $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ に制限する。逆に,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (5.16)$$

と表せる。単位ベクトルのあいだには次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} e_r &= \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y & e_x &= \cos \varphi e_r - \sin \varphi e_\varphi \\ e_\varphi &= -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y & e_y &= \sin \varphi e_r + \cos \varphi e_\varphi \end{aligned} \quad (5.17)$$

ベクトル A の平面極座標成分 A_r, A_φ と直交座標成分 A_x, A_y のあいだには (5.17) 全く関係式が成り立つ。

質点の運動の多くは平面上で行われる。そのようなときは、平面上の極座標を用いると記述しやすい。運動の平面を xy 平面にとると、 $z = 0$ であるから、空間極座標では $\theta = \pi/2$ に対応する。従って、平面上の点 P を、原点 O からの距離 r と、直線 OP と x 軸の正の部分とのなす角を反時計回りに測った φ で表すことになる(図 5.3)。

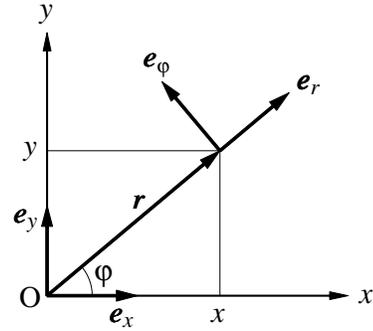


図 5.3: 平面極座標

平面極座標系におけるいろいろな関係式は、上で述べた空間極座標系の関係で $\theta = \pi/2$ として得られる。

5.2 運動方程式

5.2.1 極座標単位ベクトルの時間変化

xy 平面上を物体が運動するとき、その運動が極座標でどのように表されるかを考えてみる。直角座標系で点 $P(x, y)$ にある物体の位置ベクトルは、平面極座標で

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (5.18)$$

と表せる。物体の速度は位置ベクトルを時間で微分して、さらに、加速度は速度を時間で微分して得られる。しかし、時間微分を実行するに当たって注意が必要である。それは、極座標の単位ベクトルは直角座標の単位ベクトルと次の点において著しく異なるからである。

物体(位置ベクトル)の移動とともに、 r 方向と φ 方向が変化するので、極座標系の単位ベクトルの向きが時間の経過とともに変化する(図 5.4 参照)。

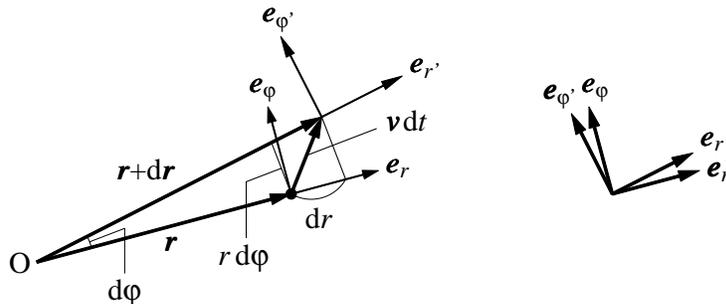


図 5.4: 平面極座標における単位ベクトルの時間変化

直角座標系の単位ベクトルは、空間に固定されているので時間とともに変化しない。この性質を利用して、(5.17)

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

から，極座標系の単位ベクトルの時間微分を計算することができる。 φ が時間 t の関数であることに注意して，

$$\begin{aligned}\frac{de_r}{dt} &= -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} e_x + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} e_y = +\frac{d\varphi}{dt} (-\sin\varphi e_x + \cos\varphi e_y) \\ \frac{de_\varphi}{dt} &= -\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} e_x - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} e_y = -\frac{d\varphi}{dt} (\cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y)\end{aligned}\quad (5.19)$$

となる。最右辺の括弧の中は，それぞれ， e_φ と e_r であるから，極座標の単位ベクトルの時間微分は

$$\boxed{\frac{de_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} e_\varphi, \quad \frac{de_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} e_r}\quad (5.20)$$

であることがわかる。

5.2.2 速度，加速度

極座標で表した位置ベクトル $r = r e_r$ を時間で微分すると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} e_r + r \frac{de_r}{dt}\quad (5.21)$$

であるが，ここで単位ベクトルの時間微分の関係式 (5.20) を用いると，物体の速度 v が極座標で

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} e_r + r \frac{d\varphi}{dt} e_\varphi}\quad (5.22)$$

と表せることがわかる。すなわち，速度の r 方向成分と φ 方向成分は

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}\quad (5.23)$$

である。 v_r も v_φ も速度の次元 (SI 単位系では m/s) をもつ。

物体の加速度は速度の時間微分である。極座標で表した速度 (5.22) を時間で微分して，単位ベクトルの時間微分の関係式 (5.20) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d^2r}{dt^2} e_r + \frac{dr}{dt} \frac{de_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} e_\varphi + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} e_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{de_\varphi}{dt} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] e_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] e_\varphi\end{aligned}\quad (5.24)$$

が得られる。従って，極座標における加速度ベクトルは次の式で表せる：

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] e_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) e_\varphi}\quad (5.25)$$

5.2.3 運動方程式

質量 m の物体にはたらく力 F を極座標で r 方向成分と φ 方向成分に分けて

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (5.26)$$

と表すと、運動方程式も r 方向成分と φ 方向成分に分けられる

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = F_r \quad (5.27)$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = F_\varphi. \quad (5.28)$$

一般に、力の成分 F_r と F_φ は、位置 r, φ と時間 t の関数である。2つの方程式 (5.27) と (5.28) は、 r と φ を含んでいるので、直角座標系における運動方程式よりも複雑である。しかし、円運動や惑星の運動、振り子の運動などを記述するには、極座標のほうが便利である。

5.3 仕事・ポテンシャル

5.3.1 力の線積分

仕事を表す力の線積分は、直角座標を用いると

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (5.29)$$

と書けた (4.42 参照)。ここで、 dx, dy, dz は3つの座標軸方向の微小な長さの要素である。一方、極座標系における、3つの座標軸方向の微小な長さの要素は次の様に表される。

$$r \text{ 方向} : dr$$

$$\theta \text{ 方向} : r d\theta$$

$$\varphi \text{ 方向} : r \sin \theta d\varphi$$

dr は、 θ と φ が一定な直線上の微小な長さ、 $r d\theta$ は r と φ が一定な曲線 (原点を中心とする円) 上の微小な長さ、 $r \sin \theta d\varphi$ は r と θ が一定な曲線 (z 軸に垂直な平面上にあり z 軸上に中心をもつ円) 上の微小な長さである。従って、力の線積分は、空間極座標で

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\varphi r \sin \theta d\varphi) \quad (5.30)$$

と表せる。平面極座標では、(5.30) で $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$ として次のようになる。

$$W = \int_A^B (F_r dr + F_\varphi r d\varphi) \quad (5.31)$$

5.3.2 ポテンシャルと力

力 F の線積分の値が始点と終点だけで決まり積分の経路に依存しないとき、力 F は保存力であると言う。このとき、位置だけできまるポテンシャル $U(r)$ が定義できる（前講参照）。力 F はポテンシャル $U(r)$ から求めることができ、直角座標系では

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (5.32)$$

と表せる。空間極座標では、ポテンシャルを r, θ, φ の関数として表して、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (5.33)$$

平面極座標では、上の式で $\theta = \pi/2$ として、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (5.34)$$

となる。

5.4 円運動

座標原点を中心とする円周上を運動する質点を考える。質点の位置ベクトルを r とすると、 $r \cdot r = r^2$ で $r = \text{一定}$ を満たす。両辺を時間 t で微分して、

$$\frac{dr}{dt} \cdot r + r \cdot \frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{より} \quad r \cdot \frac{dr}{dt} = 0 \quad (5.35)$$

を得る。すなわち、位置ベクトル r と速度ベクトル $v = dr/dt$ は常に直交する。円の面内に x 軸と y 軸をとると、円周は

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (5.36)$$

と表せる。角 φ は時間の関数であり、その時間変化の割合 $\omega = d\varphi(t)/dt$ を角速度という。

等速円運動 等速円運動の場合、角 $\varphi(t)$ は

$$\omega = \text{一定} \quad \text{より} \quad \varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (5.37)$$

と表せる。 φ は円運動の位相とも呼ばれ、 φ_0 は $t = 0$ における位相で位相定数である。質点の位置を表す x 座標と y 座標は、(5.36) と (5.37) より、半径 $r = a = \text{一定}$ として、

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (5.38)$$

と表せる。等速円運動する質点の運動方程式は、(5.38) の両辺を時間について2回微分（加速度）して、両辺に質量 m をかけて得られる：

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega^2 y. \quad (5.39)$$

これより、質点にはたらく力は、ベクトルで、また、平面極座標で次のように表せる：

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}, \quad \begin{cases} F_r = -m\omega^2 r \\ F_\varphi = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

すなわち、等速円運動する質点にはたらく力は円の中心（座標原点）を向く 向心力 である。

運動方程式を極座標で表すと、(5.27) と (5.28) に力の成分を代入して

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = -m\omega^2 r, \quad m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (5.41)$$

となる。第2式から、 $h = r^2 (d\varphi/dt)$ は時間に依らない定数であることがわかる。この性質は等速円運動に限って成り立つ性質ではない。(5.40) で表される力の作用を受ける質点の運動は一般に座標原点を中心とする楕円運動（2次元調和振動）である。その特別な場合が円運動である。円運動では $r = \text{一定}$ であるから、等速円運動の仮定 ($\omega = d\varphi/dt = \text{一定}$) に一致する結果が得られる。

5.5 振り子の運動

棒の先端におもりをつけ、他端を固定して鉛直面内で振らせる場合の運動を考える。このような振り子を 単振り子 という。おもりは固定点からの距離が一定である円周上を運動するから、本質的には、1次元運動である。ここでは、理想的な場合を考え、棒は十分に細く、棒の質量やおもりの大きさは無視できるとする。

5.5.1 運動方程式

おもりが振れる面内で、棒の固定点を原点とし、鉛直下向きに x 軸を、水平に y 軸をとる。おもりの質量を m 、棒の長さを l とする。おもりにはたらく力は、原点へ向いた棒の張力 S と、鉛直下向きの重力 mg である（図 5.5）。

鉛直下向きの重力を r 方向成分と φ 方向成分で表して次のように書ける：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -S \mathbf{e}_r + mg \mathbf{e}_x \\ &= (mg \cos \varphi - S) \mathbf{e}_r - mg \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (5.42)$$

従って、 r 方向成分と φ 方向成分に分けて、

$$-ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = mg \cos \varphi - S \quad (5.43)$$

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi \quad (5.44)$$

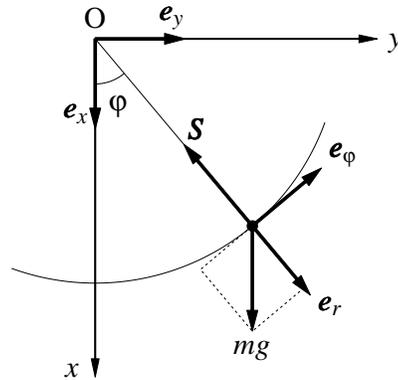


図 5.5: 振り子の運動

となる。ここに、 $r = l =$ 一定であり、その時間微分は 0 になることを考慮した。

振幅が小さいときの運動 振れ角 φ が小さいとき、 φ 方向成分の運動方程式 (5.44) において $\sin \varphi \approx \varphi$ と近似できる。このとき、運動方程式は

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \varphi \quad (5.45)$$

となる。これは、単振動の運動方程式である。解は、2つの積分定数 a (振幅) と δ (位相定数) を用いて次のように書ける：

$$\varphi = a \sin(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.46)$$

5.5.2 振幅が小さくないときの運動

振れ角 φ が小さくないとき、運動は解析的には求められない。 r 方向成分の運動方程式 (5.43) を時間で微分し、 φ 方向成分の運動方程式 (5.44) を代入すると、棒の張力 S に対する微分方程式が得られる：

$$\frac{dS}{dt} = -3mg \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 3mg \frac{d}{dt}(\cos \varphi) \quad (5.47)$$

これはただちに積分できる：

$$S = 3mg \cos \varphi + C. \quad (5.48)$$

この結果を (5.43) に代入し、積分定数 C を初期条件の 1つを用いて決定する。 $\varphi = 0$ のとき、おもりの速度の大きさを

$$v_\varphi = l \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{\varphi=0} = v_0$$

として

$$C = -2mg + \frac{m}{l} v_0^2 \quad (5.49)$$

となる (図 5.6 参照)。運動方程式 (5.43) は

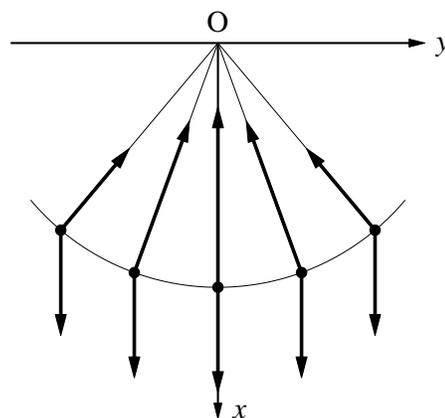


図 5.6: 振り子の運動と棒の張力

$$\left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi) = 4gl \left(k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad k^2 = \frac{v_0^2}{4gl} \quad (5.50)$$

となる。従って、運動方程式 (5.50) は

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (5.51)$$

と書き直せる。右辺の複合のうち、 $+$ ($-$) はおもりが φ の正 (負) の向きの進むことを表す。

$\varphi = 0$ のときのおもりの速度 v_0 を決めると, k の値が決まる。 $k < 1$ ならば, $k = \sin(\varphi_0/2)$ から決まる φ_0 の角度の範囲 $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ で運動が行われる。 $k = 1$ ならば, $\varphi_0 = \pi$ になる。 $k > 1$ ならば, φ はどのような角度もとることができ, 振り子は一方向向きに回転する。

以下, $k < 1$ の場合を問題にする。このとき,

$$k \sin \theta = \sin \frac{\varphi}{2} \quad (5.52)$$

によって, φ から θ に変換すると, φ が 0 から最大値 φ_0 まで変化するとき, θ は 0 から $\pi/2$ まで変わる。 φ の方程式 (5.51) は, + 符号の場合, θ についての微分方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (5.53)$$

になる。あるいは, 積分形で書けば

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt \quad (5.54)$$

となる。両辺の積分から, 振動の周期は

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.55)$$

で与えられる (図 5.7)。 $K(k)$ は楕円積分と呼ばれ, 初等関数では表せない。

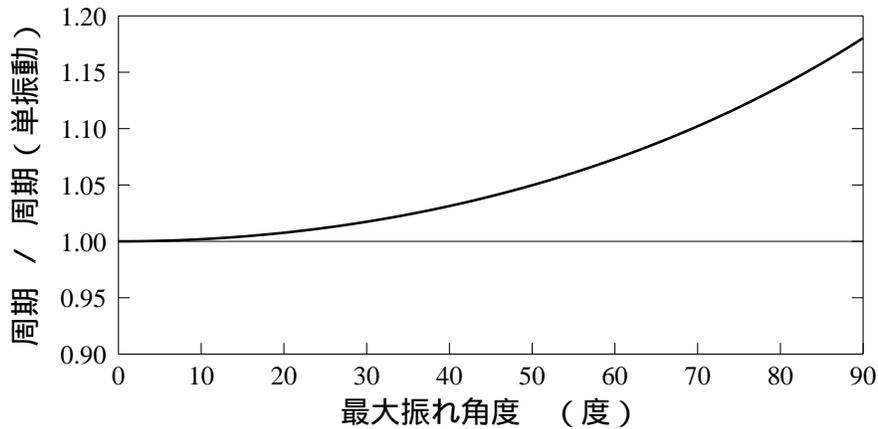


図 5.7: 単振り子の最大振れ角度と周期

初期条件によって決められた k の値に対する積分 $K(k)$ の値は数値的に求めるしかないが, 次のように近似計算をすることもできる。式 (5.55) の被積分関数を, $k \sin \theta$ についてテーラー展開 ((3.32) で $x = -k^2 \sin^2 \theta$) すると,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \theta + \dots \quad (5.56)$$

になる。 $\sin \theta$ の偶数乗の積分は

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{(2n)} d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \quad (5.57)$$

であるから、振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (5.58)$$

と k^2 の級数に展開できる。 k が小さいとき、すなわち、 φ の振幅が小さいとき、展開の第 1 項だけをとると、振幅が小さいとき（単振動）の周期に一致する（図 5.7）。

5.5.3 仕事

ここでは、平面極座標系を採用し、(5.31) を用いて仕事を計算してみる。まず、位置ベクトルの大きさは変化しないので、 r 方向の積分は常に 0 である。また、物体には棒からの張力と重力 mg がはたらくが、張力は経路（円弧に沿う運動）と常に垂直であるから仕事をしない。仕事をするのは重力の φ 方向成分

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi \quad (5.59)$$

だけである（図 5.8 左）。おもりが $\varphi = 0$ から $\varphi = \varphi_1$ ($\varphi_1 > 0$) まで移動するとき、力 (5.59) がおもりにする仕事は

$$W = \int_0^{\varphi_1} F_\varphi r d\varphi = -mgl \int_0^{\varphi_1} \sin \varphi d\varphi = -mgl(1 - \cos \varphi_1) \quad (5.60)$$

となる。ここで、最右辺の $l(1 - \cos \varphi_1)$ は、 $\varphi = \varphi_1$ である点の、 $\varphi = 0$ の点（振動の中心）から測った高さを表している。仕事 (5.60) は、おもりの位置 (φ_1) だけの関数である。

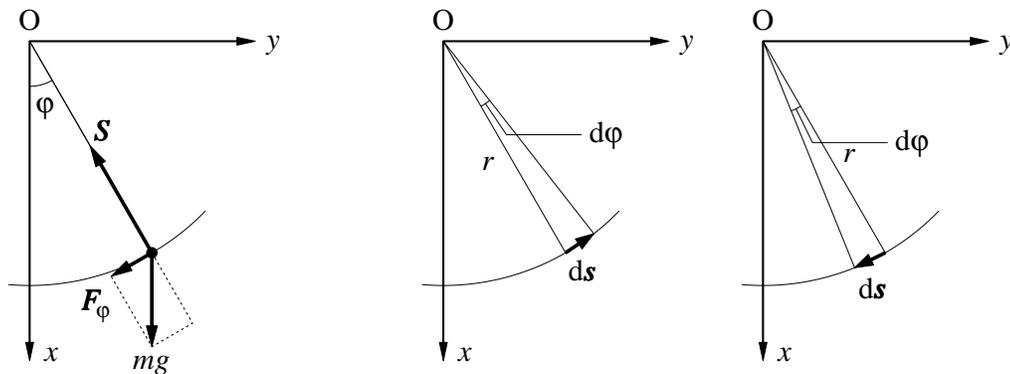


図 5.8: 単振り子と仕事

おもりが $\varphi = 0$ の点から一度 φ の最大値の点まで行き、 $\varphi = \varphi_1$ の点までもどって来るまでのあいだに重力がする仕事は、 $\varphi = 0$ の点から $\varphi = \varphi_1$ の点まで運動するあいだに重力がする仕事に等しい。また、仕事 (5.60) は振幅が小さいという近似を用いていない。すなわち、振動が単振動であるか否かによらずに成り立つ式である。