フーコーの振り子と力学

P&Pフーコーの振り子教育プロジェクト

フーコーの振り子と力学

1．フーコーの振り子と地球の自転

「地球が自転しているのかどうか、どうやったら直接的に確かめることができますか？」と聞かれたら、皆さんはどのように答えますか？21世紀の今日、地球が自転していることは常識となっています。現代では、子供でも、静止衛星は地球に自転に合わせて一日に１回地球の回りを回転するから、地球からみると静止しているように見えることを知っています。19世紀の科学者でも、地球が自転しているから太陽が地球の周りを回っているように見えて、地球に夜と昼ができていることを知っていました。しかし、静止衛星のようなものが存在しなかった時代に、どのようにして科学的に直接、地球の自転を証明したのでしょうか？

1.1　歴史的背景

地球や太陽等の天体の動きの理解については、長い間、宗教の影響を受けた天動説などが主流でしたが、コペルニクス(Nicholas Copernicus, 1473-1543)やガリレイ(Galileo Galilei, 1564-1642)による木星衛星の観測結果などをふまえて、19世紀中頃にもなると地球の公転や自転は一般的に認められるようになっていました。しかしながら、16世紀からその当時までに地球の自転を「地上で」「直接」検証する方法はまだありませんでした。

1.2　フーコーによる地球自転の実験的証明

フーコー(Jean Bernard Léon Foucault)は1819年、パリで中産階級の家に生まれました。幼い頃から手先が器用であったフーコーは、一旦は医学の道を志しましたが科学の世界に没頭していくことになります。フーコーは振り子による地球自転の証明だけではなく、いくつかの科学的発明・貢献をしています。最も有名なのはジャイロスコープでしょう。他には「ダゲレオタイプ」と呼ばれた写真機の改良や顕微鏡の照明調整装置の発明、光速度の測定等です。

話を振り子に戻しましょう。フーコーが振り子による地球の自転の証明を行うきっかけは偶然だったそうです。幼い頃から手先が器用であったフーコーはいろいろな実験装置を自分で製作していました。フーコーは、**1845**年にはじめて太陽表面の詳細な写真撮影に成功しました。この撮影には長い時計じかけの特別な装置の振り子を見ていて、装置が回転しているにもかかわらず、振り子が同じ振動面を保とうとしているのに気がついていました。

1850年のある日、彼は旋盤のチャックに取り付けた棒の振動する面がチャックの回転によらず同じ方向に振動するのに気づきました。彼は棒を振り子に置き換えてその運動を考えてみました。振り子の支点が地球とともに自転しても振り子自体には力が加わらないなら、地球が自転しても振り子の振動する面は変化しないはずであり、もしそうなら、自転する地球と一緒に回転している人には自転とともに振り子の振動面が回転していくように見えるはずだと考えました。さっそく、彼はこの事を証明するための装置の製作に取りかかりました。数ヶ月後、彼は自宅地下室の天井に長さ2mのワイヤーを固定しました。その際、

ワイヤーがねじれる事なく自由にあらゆる方向に揺れ動くことができるように固定方法に工夫をこらしました。ワイヤーの下端には重さ5kgの真ちゅう製の錘が取り付けられました。1851年1月6日午前2時、彼は振り子をゆっくりと揺らし始めました。振り子をじっと見つめていたフーコーは、振り子が揺れる面が最初の位置からゆっくりと、しかし確実にずれていくことを確認しました。その現象は地球が自転していることの、世界で初めての確たる実験的証明となりました。

彼は振り子の振動する面の動きによって地球の自転が確認できることを確信し、1851年2月2日にはパリ天文台でも長さ11mの振り子を使って、パリ在住の科学者達に地球の自転を実際に証明してみせました。当時の大統領ルイ・ナポレオンは科学分野の発展に熱心だったので、フーコーの振り子の実験のことを聞くと、その当時パリで最大の建物であったパンテオン寺院で振り子の実験を行うようにフーコーに命じたのでした。1851年3月26日、フーコーは技師のフロマンと協力して、パンテオン寺院のドーム天井に長さ67m、錘の重さ28kgの巨大な振り子を取り付け、角度の目盛りを刻んだ円盤の上をゆっくりと振らせました。この振り子の周期は約16秒でした。振り子の振動する面が次第に移動して地球が自転していることがわかりやすいように、振動する錘の先端に取り付けた棒が円盤の周囲に盛られた砂を掻いていく様子を大勢の人々の目前で実演して見せたのです。その後、世界各地でフーコーの振り子の追試実験が行われ、現在に至っています。余談になりますが、世界で初めて超伝導現象を発見したカメリン・オンネスも、博士論文の内容はフーコー振り子の理論解析だったそうです。

1.3　コリオリの力とフーコーの正弦則

さて、フーコーの振り子の振動する面は時計回り、反時計回りのどちらに回転していくのでしょうか。このことを考えるにはコリオリの力(Coriolis effect)と呼ばれる見かけの力を考える必要があります。コリオリの力とは、回転座標系上で移動した際に移動方向と垂直な方向に移動速度に比例した大きさで受ける慣性力の一種で、1835年フランスのコリオリによって発表されました。コリオリの力は回転座標系において、移動方向にかかわらず常に移動方向に対して垂直な向きに発生します。その方向は回転が反時計周りの場合、進行方向に対し右向きの方向に(左から力を受けるように)発生します。自転している地球は、北極点上空から見ると反時計周り、南極点上空から見ると時計周りに回っているように見えます。そのため、北半球では右向きに、南半球では左向きにコリオリの力が働きます。つまり、北半球にあるフーコーの振り子の振動面は時計回りに回転していくことになります。なお、コリオリの力を考慮した振り子の運動の解析については後の章で説明しています。

最後に、フーコーの振り子を考える際に重要な式をいくつかあげておきます。まず、フーコーの振り子に限らず、単振り子の周期T(sec)は振り子の長さをL(m)、重力加速度をg(m/s^2)とすると、

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \tag{1-1}$$

で求められます。フーコーが複雑な数式を解くことなく導出した、「フーコーの

正弦則」と呼ばれる式があります。振り子の設置されている地球上での緯度をαとすると、振り子の振動面が1周するのに必要な時間(hr)は

$$24/\sin\alpha\ (\mathrm{hr}) \tag{1-2}$$

です。よって、振り子の振動面が24時間かかって回転する角度(deg)は

$$360\sin\alpha\ (\mathrm{deg}) \tag{1-3}$$

となります。その振り子の振動面の回転角速度が正確であれば、その地点の緯度も計算できます。

つまり、北極や南極で振り子を振らせるとその振動面はちょうど24時間で1周しますが、赤道上では全く回転しないことになります。ここ九州大学伊都キャンパスの緯度は北緯33度35分ですから、振り子が1日に回転する角度は199度となり、1時間におよそ8.3度ずつ時計回りに回転しながら、ほぼ43時間（約1.8日）かかって1周することになります。

1.4　科学における追求する心の重要さ

科学の実験をすると、ときどき不可解な現象に遭遇します。しかし不思議な現象でも、必ず原因となる理由があります。実験で得られた結果をおろそかにせずに、原因を追求する心をもつことが大事です。フーコー振子の場合も、その科学者として追求する姿勢の中からひらめきが生まれ、新しい発見に結びつきました。

1.5　参考 (フーコーの振り子についてもっと詳しく知りたい人は・・・)

●書籍

・アミール・D・アクゼル著「フーコーの振り子 〜科学を勝利に導いた世紀の大実験〜」（早川書房）

・Willian Tobin著、「The life and Science of Leon Foucault」（University of Canterbury）

・ウンベルト・エーコ著「フーコーの振り子」（文春文庫）（これはミステリー小説ですので注意。）

●インターネットからの情報

現在、様々な情報はインターネットを介して得ることも可能です。日本各地にあるフーコーの振り子の情報は、大阪市立科学館の渡部義弥さんの「日本のフーコー振り子探索プロジェクト」(http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/~yoshiya/foucault/) を参考にするといいでしょう。もちろん、日本だけでなく世界中の博物館や学校等でたくさんのフーコーの振り子が揺れていますので、検索して情報を得るのもおもしろいかもしれません。

●力学の教科書など

後の章に書かれているように、フーコーの振り子は解析力学を使うことによってその運動の様子をきれいに記述することができます。興味がわいたら、後の章に進んでください。

２．高校で物理を履修した人、大学でこれから数学や力学を勉強する人へ
（ニュートンの運動方程式によるフーコーの振子の運動解析）

2.1 ニュートンの運動方程式
質量mの物体がx方向の力F_xを受けるとき、x方向に生じる加速度a_xはどう表されたでしょうか。高校生で物理を勉強した人はニュートンの運動方程式を知っています。そこで、加速度と力の関係式が次のように書けることが分かります。

$$ma_x = F_x \tag{2-1}$$

この関係式によって、物体の位置xを時間tの関数$x(t)$として求めます。ここでは、これから後、x方向運動の速度v_xや加速度a_xに出てくる時間微分を、次のようにドットを使って書くことにします。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

もちろん、ニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{x} = F_x \tag{2-2}$$

となります。

2.2 ニュートンの運動方程式によるフーコーの振子の運動の解析
2.2.1 座標の取り方
フーコーの振子の運動を調べるために、ニュートンの運動方程式を用いることにします。下図のように、地球の表面上に座標(x, y, z)を取り、大きさ１の単位ベクトル$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$をそれぞれ$x, y, z$方向に指定します。

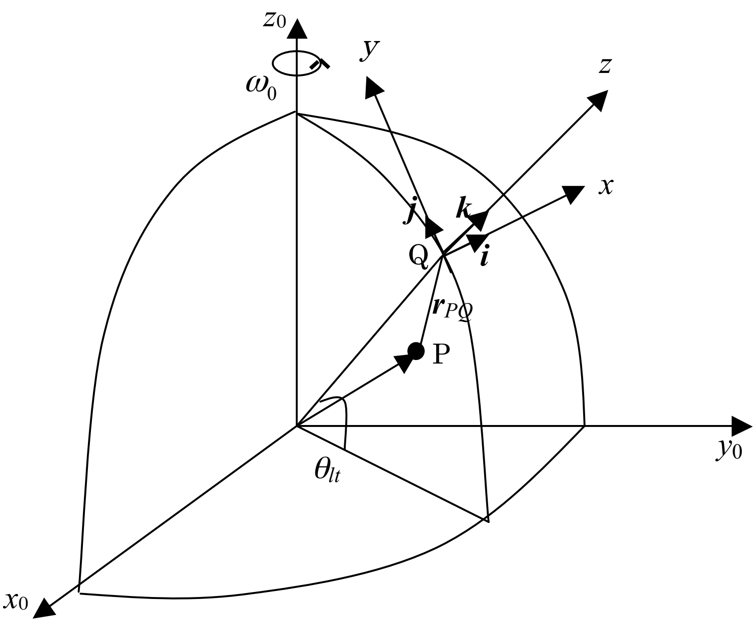


図 2-1　振子の座標の取り方。地表面に x, y, z 座標を定義。

一方、この図のように地球上にその自転とは一緒に回転していない座標系 (x_0, y_0, z_0) をとり、それを基準にして地球の自転を表す角速度を ω_0、緯度（北緯）を θ_{lt} とし、さらに地球の半径は R とします。ここでは、振子の位置を P 点、振子の支点を Q 点で示しています。地球の自転の角速度 ω_0 と観測点の緯度 θ_{lt} を使って、振子の振動面の角速度が $\omega_0 \sin\theta_{lt}$ になること、つまり振子の振動面の回転周期が $T = 2\pi/(\omega_0 \sin\theta_{lt})$ であることを示すことにします。

2.2.2 地球の自転を考えない場合の単純なニュートンの運動方程式

振子の錘の質量を m、それに働く重力の加速度を g、さらに振子の糸の長さを l、振子の糸の張力を p とします。これらをまとめて、次のように表します。

時刻 t における振子の位置：(x, y, z)

その振子の速度と加速度：$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$,　$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \equiv \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$

振子の長さ：$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

糸の張力ベクトル：$(p_x, p_y, p_z) = -\{p \bullet (x/l), p \bullet (y/l), p \bullet (-z/l)\}$

と置くと、ニュートンの運動方程式は次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = p_x = -p \bullet x/l \\ m\ddot{y} = p_y = -p \bullet y/l \\ m\ddot{z} = -mg + p_z = -mg + p \bullet (-z)/l \end{cases}$$

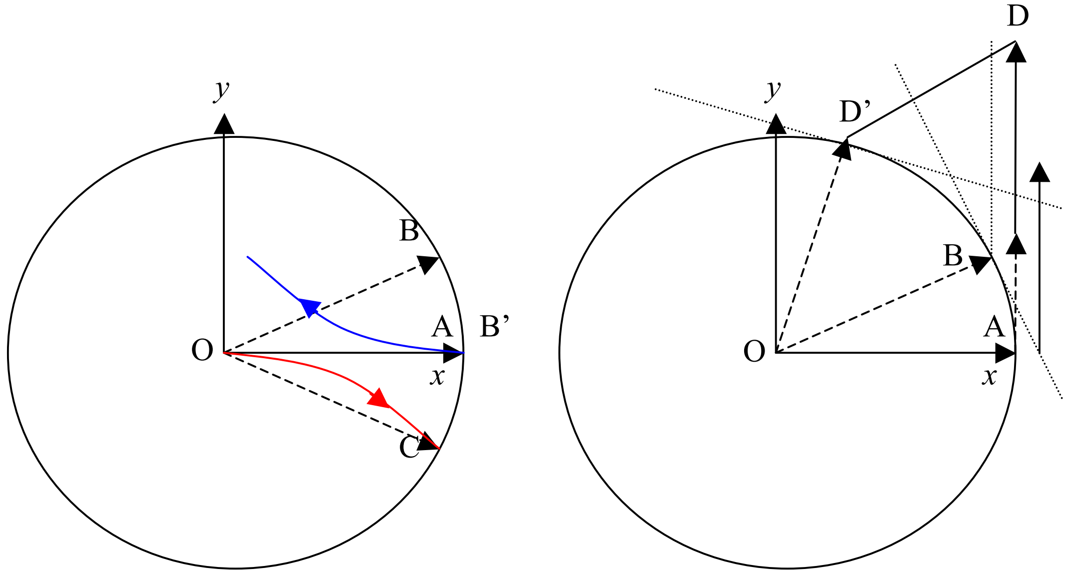
ここで振子の振動の振幅が小さい場合を考えることにします。すると、張力 p は mg と同じであるとして近似できます。また、z はほぼ一定になるので、一定として近似し、$\dot{z} = \ddot{z} = 0$ とします。そこで、近似的なニュートンの運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \bullet x/l \\ m\ddot{y} = -mg \bullet y/l \end{cases} \tag{2-3}$$

となり、２次元の単振動を表す方程式になります。

2.2.3 地球が回転していることによる見かけの力「コリオリの力」

イメージし易いように、２次元運動の簡単な場合を考えます。この場合について、回転している系の上で生じる見かけの力「コリオリの力」を説明します。ここでは、回転している円形の板の上で、ボールを投げる場合を考えてみましょう。



(a) 半径方向へボールを投げた場合　　(b) 回転方向へボールを投げた場合

図 2-2　回転している円板上での見かけの運動

まず、円板は回転していないとして、図 2-(a)のように、円板の中心 O から半径方向にボールを投げ A 点に着地する場合を考えてみます。ボールの運動を次のように表現します。

ボールの速度（水平方向速度）： v

中心点 O から着地点 A までの距離（半径）： r_{OA}

中心点 O から着地点 A までの飛行時間: t_{OA}

次に、円板が z 軸回りの角速度 ω_z で左回り（半時計回り）に回転しているとします。ボールは A 点に着地しますが、その飛行時間 t_{OA} の間に A 点は角度 $\omega_z t_{OA}$ だけ動きます。この点を B 点で表しています。A 点から B 点までの半径距離は $r_{OA}\omega_z t_{OA}$ となります。回転している円板上の乗っていて最初に A 点にいた人から観ると、この着地点は C 点のように見えます。もちろん、A 点から C 点までの半径距離も $r_{OA}\omega_z t_{OA}$ となります。そこで、A 点にいた人から観ると、ボールはある加速度 a を受けて図 2-2(a)の赤い線のように飛んで C 点に到達したように見えます。加速度 a を時間 t_{OA} の間にわたって受けたとき、その進む距離は

$(1/2)at_{OA}^2$となります。この距離が、A 点から C 点までの半径距離となります。したがって、

$$(1/2)at_{OA}^2 = r_{OA}\omega_z t_{OA}$$

の関係が成り立ち、加速度aは

$$a = 2r_{OA}\omega_z / t_{OA} = 2\omega_z v$$

となり、A 点にいて円板と一緒に動いている人には、ボールはその進行方向に対して右向きに加速度$2\omega_z v$を受けているように見えます。この加速度に、質量をかけて力に直すと、

$$F = 2m\omega_z v$$

となりますが、この見かけの力が、コリオリの力と呼ばれます。

次に、回転している A 点から中心点 O に向かって速度vでボールを投げる場合を考えてみましょう。今度は、ボールは速度vの他に、回転方向の速度$r\omega_z$を持ちます。この運動を A 点にいて円板と一緒に動いている人が観ると、同図の青線のように見えます。結局、いずれの場合も、ボールは進行方向に対して右向きに加速度$2\omega_z v$を受けているように見えます。

それでは、図 2.2(b)のように、A 点にいる人がボールを水平速度vで円板の回転の向きに投げる場合を考えてみましょう。A 点の半径位置をrとします。今度は、観測点を円板の外の回転していない系にとって、一旦、全体の加速度を考えてみます。ボールにはこの速度vに速度$r\omega_z$が加わります。到着点を D 点と取り、その飛行時間をt_{AD}とします。この D 点までの距離を、円周上の同じ半径距離の点にとると D'点になります。A 点に載って動いている人には、ボールはある加速度aをうけ次第に右へ反れていくように見えます。加速度aを時間t_{AD}の間にわたって受けたとき、その進む距離は$(1/2)at_{AD}^2$となります。一方、角速度による飛行距離分d_ω、投げた速度vによる飛行距離分d_vは、それぞれ、$d_\omega = r\omega_z t_{AD}$、$d_v = vt_{AD}$になります。これらと角度変化による距離の和を使うと、

$$\begin{aligned}(1/2)at_{AD}^2 &= \omega_z t_{AD} \bullet d_\omega/2 + \omega_z t_{AD} \bullet d_v + (vt_{AD}/r) \bullet d_v/2 \\ &= \omega_z t_{AD} \bullet r\omega_z t_{AD}/2 + \omega_z t_{AD} \bullet vt_{AD} + (vt_{AD}/r) \bullet vt_{AD}/2\end{aligned}$$

となります。全体の加速度は

$$a = r\omega_z{}^2 + 2\omega_z v + v^2/r$$

となるので、質量をかけて力に直すと、

$$F = mr\omega_z^2 + 2m\omega_z v + mv^2/r \tag{2-4}$$

となり、円板の角速度による力、見かけの力（コリオリの力）、円板上での速度vによる力となります。図 2.2(a)、(b)のいずれの場合も、見かけの力は同じであり、進行方向に対して右方向に作用します。角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}_z$をz方向（円板の角運動量の向き）にとり$\boldsymbol{\omega}_z = \omega_z \boldsymbol{k}$とすると、コリオリの力は方向を含めて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_C &= 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}_z \\ &= 2m(v_y\omega_z - v_z\omega_y, v_z\omega_x - v_x\omega_z, v_x\omega_y - v_y\omega_x) = 2m(v_y\omega_z, -v_x\omega_z, 0)\end{aligned} \tag{2-5}$$

と表すことができます。

コリオリの力を使って、台風の渦の回転の向きを説明することができます。

地球の北半球では、図 2-2 と同じように、地表面に対して鉛直向きの角速度ベクトル（$\omega_z > 0$）ができます。図 2-3 のように、中心の低気圧領域に、外側から空気が流れるとします。このとき、空気の流れに向きに右向きにコリオリの力が働きます。その結果、北半球では、台風の渦巻きは必ず左巻きになります。南半球では、$\omega_z < 0$となるので、台風は右巻きになります。

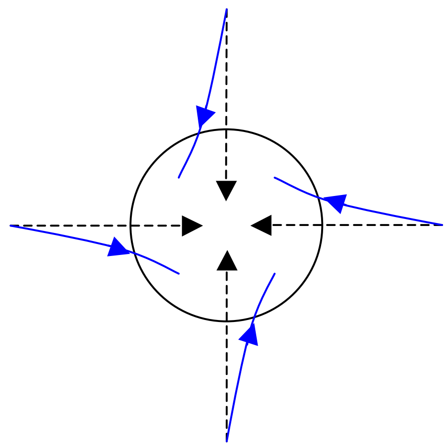


図 2-3 北半球における台風の回転の向き。コリオリの力により左巻きへ。

次に、振子がコリオリの力を受ける場合に運動を考えてみましょう。北半球では、コリオリの力は、進行方向に対して右向きの力になります。そこで、行きの場合に進行方向に対して右向きの力、戻りの場合にも進行方向に対して右向きの力が作用すると、図 2-4 に模式的に示すように、振子の振動面は時計回りに回転することが予想されます。

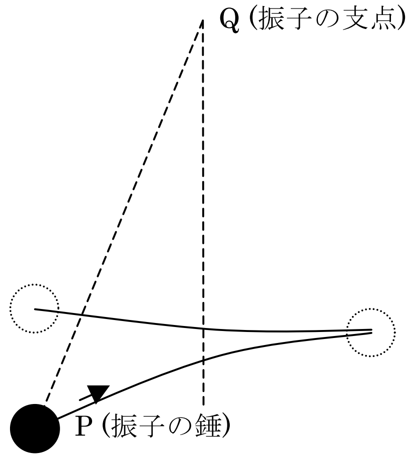


図 2-4　進行向きに対して右向きの力を受ける錘の運動。振動面が徐々に回転。

2.2.4 ニュートンの運動方程式によるフーコーの振子の運動解析

コリオリの力は、(2-5)式で表されることが分かりました。ただし、北緯θ_{lt}の場

所では、その鉛直方向の角速度ω_zは、地球の自転の角速度ベクトルω_0を使って、$\omega_z = \omega_0 \sin\theta_{lt}$となります。(2-4)式の第１項は地球の自転による遠心力を示し、第３項は振子の運動による遠心力を表しますが、それらは地球の重力に比べて小さくので無視することができます。したがって、(2-3)式の運動方程式は、次のように近似できます。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\dot{y}\omega_0 \sin\theta_{lt} - mg \bullet x/l \\ m\ddot{y} = -2m\dot{x}\omega_0 \sin\theta_{lt} - mg \bullet y/l \end{cases}$$

表現を簡単にするため、

$$\omega_z = \omega_0 \sin\theta_{lt}, \quad \omega_g = \sqrt{g/l}$$

を使用すると、解くべき式は、

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y}\omega_z - x\omega_g^2 \\ \ddot{y} = -2\dot{x}\omega_z - y\omega_g^2 \end{cases} \tag{2-6}$$

となります。これらは定数係数の線形微分方程式なので、解として$x = Ae^{i\lambda t}, y = Be^{i\lambda t}$の形を採用して、微分方程式を解くことにします。解自体は、一旦、複素数として取り扱いますが、もちろん最終的に座標の値は実数となります。仮定した解の形を (2-6)式に代入して、定数 A、B に関する連立方程式（特性方程式）を求めると、

$$\begin{cases} \left(-\lambda^2 + \omega_g^2\right)A - 2i\lambda\omega_z \bullet B = 0 \\ 2i\lambda\omega_z \bullet A + \left(-\lambda^2 + \omega_g^2\right)B = 0 \end{cases} \tag{2-7}$$

となります。または、行列を使うと

$$\begin{pmatrix} \omega_g^2 - \lambda^2 & -2i\lambda\omega_z \\ 2i\lambda\omega_z & \omega_g^2 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

とも表現することができます。(2-7)式が$A = B = 0$以外の解を持つためには、λの値は

$$\begin{vmatrix} \omega_g^2 - \lambda^2 & -2i\lambda\omega_z \\ 2i\lambda\omega_z & \omega_g^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

を満たす必要があります（行列の知識のある人は、行列の固有値λ・固有ベクトル(A, B)を求める問題として解くことができます)。上式は、

$$\left(\omega_g^2 - \lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\omega_z^2 = \left(\lambda^2 + 2\omega_z\lambda - \omega_g^2\right)\left(\lambda^2 - 2\omega_z\lambda - \omega_g^2\right) = 0$$

となるので、二次方程式の解の公式より４つのλを求めると、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_g^2} \approx -\omega_z + \omega_g \\ \lambda_2 &= -\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_g^2} \approx -\omega_z - \omega_g \\ \lambda_3 &= \omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_g^2} \approx \omega_z + \omega_g \\ \lambda_4 &= \omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_g^2} \approx \omega_z - \omega_g \end{aligned} \tag{2-8}$$

が得られます。ω_zはω_gより数桁小さいので、(2-8)式の右辺は十分に良い近似に

なります。得られた解の一次結合によって、一般解を次のように表します。

$$x=\sum_{n=1}^{4}A_n e^{i\lambda_n t},\quad y=\sum_{n=1}^{4}B_n e^{i\lambda_n t} \tag{2-9}$$

そして、これらの係数A_nとB_nを求めます。(2-7)式の第１式より

$$B_n=\left\{\left(\omega_g^2-\lambda^2\right)/2i\lambda\omega_z\right\}A_n$$

となるので、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$についての(2-8)式の関係より、

$$B_1=-iA_1,\ B_2=-iA_2,\ B_3=iA_3,\ B_4=iA_4$$

が得られます。この関係によって、(2-9)式からB_nを消して、

$$x=\sum_{n=1}^{4}A_n e^{i\lambda_n t},\quad y=-i\sum_{n=1}^{2}A_n e^{i\lambda_n t}+i\sum_{n=3}^{4}A_n e^{i\lambda_n t} \tag{2-10}$$

と表すことができます。

次に、振子の初期条件を設定しA_nを定め、振子がどのように運動するのか調べましょう。最初に振子を手で北方へy_{ini}だけ移動させて、$t=0$の時に初速度 0 で手を放すとします。初期条件は、

$$x=0,\ y=y_{ini},\ \dot{x}=\dot{y}=0$$

となります。(2-10)式にこの初期条件を代入して、それぞれのA_nを求めると、

$$A_1=-\frac{i}{4}y_{ini}\lambda_2/\omega_g,\ A_2=\frac{i}{4}y_{ini}\lambda_1/\omega_g,\ A_3=\frac{i}{4}y_{ini}\lambda_4/\omega_g,\ A_4=-\frac{i}{4}y_{ini}\lambda_3/\omega_g$$

となります。 (2-10)式にこれらのA_nとλ_nの値を入れて書き直すと、

$$\begin{cases} x=y_{ini}\left\{\sin(\omega_z t)\cos(\omega_g t)-(\omega_z/\omega_g)\cos(\omega_z t)\sin(\omega_g t)\right\} \\ y=y_{ini}\left\{\cos(\omega_z t)\cos(\omega_g t)+(\omega_z/\omega_g)\sin(\omega_z t)\sin(\omega_g t)\right\} \end{cases}$$

が得られます。また、２次元座標を複素数によって表現すると、上式の関係は

$$y+ix=y_{ini}\exp(i\omega_z t)\left\{\cos(\omega_g t)-i(\omega_z/\omega_g)\sin(\omega_g t)\right\}$$

と表すことができ、$\exp(i\omega_z t)$の形が含まれていることから、振動面が角速度ω_zで回転することが容易に分かります。そして、$\omega_z=\omega_0\sin\theta_{lt},\quad \omega_g=\sqrt{g/l}$を置いていたので、

振子の振動の周期　$T_1=2\pi/\omega_g=2\pi\sqrt{l/g}$

振動面の回転の周期　$T_2=2\pi/\omega_z=2\pi/(\omega_0\sin\theta_{lt})$

となります。振子の長さ$l=40\mathrm{m}$、福岡市の緯度(北緯)$\theta_{lt}=33.5^\circ$ として計算すると、

$$T_1=2\pi\sqrt{40/9.8}=12.7[s]$$

$$T_2=\frac{2\pi}{\omega_0\sin\theta_{lt}}=\frac{2\pi}{7.29\times10^{-5}\sin(2\pi\bullet 33.5/180)}=1.56\times10^{5}[s]\cong 43.4[h]$$

と求まります。したがって、振動面は、２日近くかかって１回転することになります。

３．ニュートンの運動方程式の一般化した形を知りたい人へ
（ラグランジアンを用いたフーコーの振子の運動解析）

3.1 ニュートンの運動方程式の一般化（ラグランジアンとオイラー・ラグランジュ方程式）

3.1.1 偏微分の導入

力学では、偏微分をいう演算を定義すると便利です。偏微分は、通常の微分（全微分）と違い、関数の中に顕（あらわ）に含まれている変数だけについて作用する微分です。顕な変数だけに作用する偏微分は$\partial/\partial x$のように∂を使って書き、通常の微分d/dxと区別します。

高校の物理では、質量mの物体が速度$\dot{x}$で運動しているとき、その運動エネルギーTが次のように表せることを勉強しました。

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

運動エネルギーTを、速度$\dot{x}$で偏微分してみましょう。すると、

$$\frac{\partial}{\partial\dot{x}}T=\frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\dot{x}^2=\frac{1}{2}m2\dot{x}=m\dot{x}=p_x$$

となって、x方向運動量p_xになります。一方、ポテンシャルエネルギーVによって力を表す場合も、偏微分を使って、

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

と表現できます。バネのように変位xに比例する求心力$F_x=-kx$の場合には、ポテンシャルエネルギーは、$V=(1/2)kx^2$となります。

3.1.2 偏微分を使ったニュートンの運動方程式の一般化

運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーVと使い、さらに偏部分の定義に従うと、ニュートンの運動方程式は次のように書き直すことができます。

$$m\ddot{x}=F_x\rightarrow\frac{d}{dt}(m\dot{x})=\frac{d}{dt}p_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}}T\right)=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

ここで、簡単のために、エネルギーTの中にはxが含まれておらずTが速度$\dot{x}$だけで決まる場合、つまり$T=T(\dot{x})$の場合を考えています。他方、逆にポテンシャルエネルギーVの中には$\dot{x}$が含まれなくて、$V=V(x)$としています。これは通常のxyz座標（デカルト座標）での典型的な力学問題の場合になります。この場合、偏微分の定義から、

$$\frac{\partial}{\partial x}T=0,\quad\frac{\partial}{\partial\dot{x}}V=0$$

となることが分かります。したがって、**偏微分の演算規則に従うと、ニュートンの運動方程式は形式的に**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}}T\right)=-\frac{\partial V}{\partial x}\quad\rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{x}}(T-V)\right\}-\frac{\partial}{\partial x}(T-V)=0$$

と書き直すことができます。そこで、運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを差し引き、

$$L = T - V \tag{3-1}$$

とする量を使うことにします。$L = T - V$ はラグランジアンと呼ばれます。（4章で説明しますが、実はエネルギーTの中にxも含まれていて、$T = T(x, \dot{x})$の場合であってもかまいません。$\partial T(x, \dot{x}) / \partial x$は見かけの力として作用します。）

ここで$L = T - V$の定義の意義を知るために、別の一般的な座標を使った例を考えてみましょう。太陽を原点とし、質量Mの太陽の周りを回転する質量mの惑星の運動を取り上げます。平面極座標(r, θ)を使うことにします。惑星の運動エネルギーは$T = (1/2)m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\}$となり、運動エネルギー$T$が速度$\dot{r}$と$\dot{\theta}$だけでなく半径位置$r$を含みます。一方、万有引力を表わすポテンシャルエネルギーは単純に$V = -kmM/r$となります。運動エネルギーTを半径で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial r} T = mr\dot{\theta}^2$$

となり、これは回転による遠心力になります。上記のようにラグランジアンを$L = T - V$の形で定義しておくと、

$$\frac{\partial}{\partial r} L = mr\dot{\theta}^2 - k\frac{mM}{r^2}$$

となり、惑星に作用する力が遠心力と万有引力になることが分かります。rやθは、デカルト座標(x, y, z)と違い、一般座標と呼ばれることがあります。

運動エネルギーTを一般座標で偏部分すると、エネルギーを位置で微分することになるので「力」を表すことになり、**採用した一般座標に特有のみかけの力**を表すことになります。みかけの力は、採用した一般座標によって、遠心力のこともありますし、コリオリの力などの場合もあります。

このように、(3-1)式の定義に基づきニュートンの運動方程式は、偏微分という演算を使うことによって、

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\right\} - \frac{\partial}{\partial x} L = 0 \tag{3-2}$$

と書き換えることができます。この式は、オイラー・ラグランジュ方程式またはラグランジュ方程式と呼ばれます。上の導出では簡単な例についてラグランジュ方程式の説明をしましたが、後述の4章では、より一般的に変分原理からラグランジュ方程式を導出しています。

(3-2)式の形だけ見ると、一見、ニュートンの運動方程式と大した違いがないように見えます。しかし、ニュートンの運動方程式ではそれぞれの方向について、加速度と力のバランスを考察して方程式を導きます。ラグランジアンの方法では、**運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを正確に評価することだけ重要であり、それには問題に合わせた一般座標を使う**ことができます。そして、加速度と力のバランスを考えることなしに、ラグランジアンからラグランジュ方程式を機械的に導出することができます。複雑な問題では、通常、ラグランジアンから方程式を導く方法が用いられます。

多次元（n 次元）の問題では、n 次元の系について、運動エネルギーの和 T とポテンシャルエネルギーの和 V を作り、それから、一つのラグランジアン $L=T-V$ を作ります。そして、単純に、次のように n 個のラグランジュ方程式を建てて、n 個の x_i を求めていくことになります。

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}L\right\}-\frac{\partial}{\partial x_i}L=0, \quad i=1\sim n \tag{3-3}$$

ラグランジュ方程式は多次元の複雑な力学問題にも機械的に適用できるので、とても便利な方程式です。運動エネルギー T やポテンシャルエネルギー V を表すときに、x_i は必ずしも直接に座標値を示す変数である必要はありません。x_i は、問題に合わせて、T や V を簡単に表せる量に採ればよく、例えば、半径や角度のような量であっても構いません。そこで、x_i は一般座標、$\partial L/\partial \dot{x}_i$ は一般運動量と呼ばれます。多次元で複雑な問題であればあるほど、ラグランジアンとラグランジュ方程式の方法は、威力を発揮します。(3-3)式のラグランジュ方程式は、ニュートンの運動方程式と違い、偏微分の演算を使っているから表現が画一的にできるようになったといえます。

それでは、ラグランジュ方程式を使って、フーコーの振子の運動がどのように解けるかみてみましょう。ニュートンの運動方程式の場合とちがって、コリオリの力のような見かけの力を導入したり、面倒な近似の工夫をすることなしに、機械的に方程式を導くことができます。

3.2 ラグランジュの運動方程式によるフーコーの振子の運動の解析

3.2.1 座標の定義

ラグランジアンを使った定式化では、使いやすい変数を使って運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーVを表現することだけが必要です。したがって、ニュートンの運動方程式の場合と違って、見かけの現象としてのコリオリの力を使わずに、また、定式化の途中で近似を使わないことにします。

目標として、(地球とともに回転しない) 固定した座標系(x_0, y_0, z_0)で、運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーVを記述することにします。そのため、次のような 3 段階の手続きを踏むことにします。

(a)原点を地球の中心に取り、地球の自転と一緒に回転している座標系(x, y, z)で運動を表現します。図 3-1 のように、z軸は地球の中心から振子の支点を通るようにとります。そして、南側にx軸、東側にy軸を取ることにします。

(b)次に、y軸回りに座標を回転し、新しいz軸（z'軸）が北極を向く座標系(x', y', z')によって、運動を表現します。$(x, y, z) \to (x', y', z')$

(c)最後に、北極（z'軸）の周りに基準位置まで座標系を回転し、地球とともに回転していない固定座標系(x_0, y_0, z_0)で振子の運動を表現します。$(x', y', z') \to (x_0, y_0, z_0)$

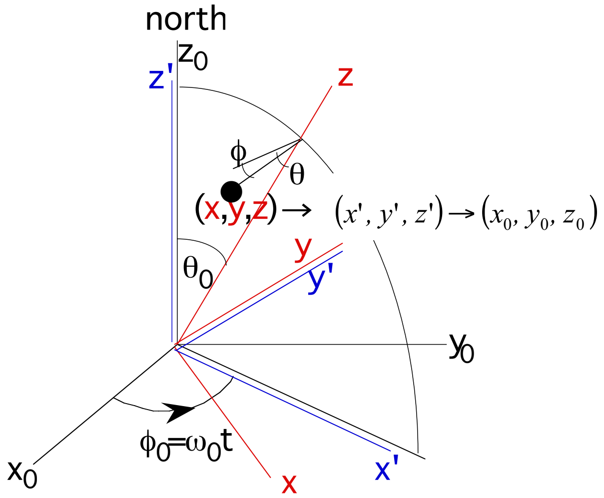


図 3.1　ラグランジアンを使った解析のための座標の定義

振子の支点は、北緯θ_{lt}で地球の中心から半径Rの位置にあるとします。北極から測った角度は、$\theta_0 = \pi/2 - \theta_{lt}$になります。ラグランジアンを使う場合には、計算しやすいようなパラメータ（一般座標）で位置変数を指定することができます。そこで、振子の糸の長さを固定値lとし、錘の位置を角度θ, ϕを位置変数として使用します。振子が静止した基準位置を$\theta = 0$にとり、$\theta = -\pi/2 \sim \pi/2$で振動を表し、角度$\phi$で振動面の回転を記述することにします。$\phi = 0$を北側にとると、(a)の座標系$(x, y, z)$で

$$(a)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\sin\theta\cos\phi \\ l\sin\theta\sin\phi \\ R - l\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

となります。典型的な長さは、たとえば、$R \approx 6400km, l \approx 10m$となります。

次に(b)にしたがって、座標系を回転して、北極をz'軸とします。この座標変換では、行列を使うと表現が楽になります。ここでは、式を長くしないため、$\sin\theta \to s\theta,\ \cos\phi \to c\phi$のように略記することにします。

$$(b)\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_0 & 0 & s\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_0 & 0 & c\theta_0 \end{pmatrix}_y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} x + iz = e^{i\theta_0}(x' + iz') \\ x' + iz' = e^{-i\theta_0}(x + iz), \\ e^{-i\theta_0} = c\theta_0 - is\theta_0 \end{matrix} \quad \begin{cases} x' = c\theta_0 x + s\theta_0 z \\ z' = -s\theta_0 x + c\theta_0 z \end{cases}$$

最後に、北極をz_0軸とする静止した座標軸で見ることにします。やはり、座標変換を行列で表現して次の形を得ます。

$$(c)\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\phi_0 & -s\phi_0 & 0 \\ s\phi_0 & c\phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{z'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\phi_0 c\theta_0 & -s\phi_0 & c\phi_0 s\theta_0 \\ s\phi_0 c\theta_0 & c\phi_0 & s\phi_0 s\theta_0 \\ -s\theta_0 & 0 & c\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

北緯θ_{lt}により$\theta_0 = \pi/2 - \theta_{lt}$、自転により$\phi_0 = \omega_0 t$となります。さらに運動$(x, y, z)$を角度$\theta, \phi$だけで表すと、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t) & s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ -c\theta_{lt} & 0 & s\theta_{lt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -ls\theta c\phi \\ ls\theta s\phi \\ R - lc\theta \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

$$C = \begin{pmatrix} c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t) & s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ -c\theta_{lt} & 0 & s\theta_{lt} \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

と表現できます。

したがって、ラグランジアンは、

$$L = T - V = (1/2)m(\dot{x}_0\dot{x}_0 + \dot{y}_0\dot{y}_0 + \dot{z}_0\dot{z}_0) - mgl(1 - \cos\theta) \tag{3-4}$$

となり、ラグランジュの運動方程式は、次の式から導くことになります。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{3-5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{3-6}$$

ここで、ポテンシャルVはθだけの関数なので、(3-6)式は次のように簡単になります。

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \tag{3-7}$$

振子の運動を表す座標（独立変数）は、角度θ, ϕだけとなっています。

3.2.2 運動エネルギーT、ポテンシャルエネルギーVの具体的表現

運動エネルギーTの計算をしやすくするために、行列を使った表現を使いましょう。

固定座標系での速度$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \dot{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\dot{C} = \omega_0 \begin{pmatrix} -s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -c(\omega_0 t) & -s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} -\dot{\theta}c\theta c\phi + \dot{\phi}s\theta s\phi \\ \dot{\theta}c\theta s\phi + \dot{\phi}s\theta c\phi \\ \dot{\theta}s\theta \end{pmatrix}$$

を使って、

$$T = (1/2)m\{\dot{x}_0\dot{x}_0 + \dot{y}_0\dot{y}_0 + \dot{z}_0\dot{z}_0\}$$

$$= \frac{m}{2}\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \frac{m}{2}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \dot{C}^t \dot{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \dot{C}^t C \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}^t C^t C \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \right\} = B_1 + 2B_2 + B_3$$

となります。ここで、B_1は$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$を含まず、振子の錘の運動速度には依存しない遠心力(ポテンシャルエネルギー)を表します。B_1はω_0^2に比例します。B_2は、$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$を一次の形を含んでおり、コリオリ力（ポテンシャルエネルギー）を表す項になります。B_2はω_0に比例します。

上式を計算するのは多少退屈な作業ですが、工夫して近似をするようなことは不必要ですから、機械的に計算できます。計算に使う途中経過は、次式になります。

$$\dot{C}^t \dot{C} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & 0 \\ -c(\omega_0 t) & -s(\omega_0 t) & 0 \\ -s(\omega_0 t)c\theta_{lt} & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -c(\omega_0 t) & -s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \omega_0^2 \begin{pmatrix} \{s^2(\omega_0 t) + c^2(\omega_0 t)\}s^2\theta_{lt} & \{s(\omega_0 t)c(\omega_0 t) - s(\omega_0 t)c(\omega_0 t)\}s\theta_{lt} & \{s^2(\omega_0 t) + c^2(\omega_0 t)\}s\theta_{lt}c\theta_{lt} \\ \{c(\omega_0 t)s(\omega_0 t) - c(\omega_0 t)s(\omega_0 t)\}s\theta_{lt} & c^2(\omega_0 t) + s^2(\omega_0 t) & \{s(\omega_0 t)c(\omega_0 t) - s(\omega_0 t)c(\omega_0 t)\}c\theta_{lt} \\ \{s^2(\omega_0 t) + c^2(\omega_0 t)\}s\theta_{lt}c\theta_{lt} & \{s(\omega_0 t)c(\omega_0 t) - s(\omega_0 t)c(\omega_0 t)\}c\theta_{lt} & \{s^2(\omega_0 t) + c^2(\omega_0 t)\}c^2\theta_{lt} \end{pmatrix}$$

$$= \omega_0^2 \begin{pmatrix} s^2\theta_{lt} & 0 & s\theta_{lt}c\theta_{lt} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta_{lt}c\theta_{lt} & 0 & c^2\theta_{lt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_1 = (1/2)m\omega_0^2\left\{l^2s^2\theta - l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta c^2\phi - 2ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta c\phi(R - lc\theta) + c^2\theta_{lt}(R - lc\theta)^2\right\} \\ \partial B_1/\partial\phi = m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi(R - lc\theta)\right\} \\ \partial B_1/\partial\dot{\phi} = 0 \\ \partial B_1/\partial\theta = m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta(1 - c^2\theta_{lt}c^2\phi) - ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\{c\theta(R - lc\theta) + ls^2\theta\} + c^2\theta_{lt}(R - lc\theta)ls\theta\right\} \\ \partial B_1/\partial\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{C}^t C = \omega_0 \begin{pmatrix} -s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & 0 \\ -c(\omega_0 t) & -s(\omega_0 t) & 0 \\ -s(\omega_0 t)c\theta_{lt} & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t) & s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ -c\theta_{lt} & 0 & s\theta_{lt} \end{pmatrix}$$

$$= \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & s\theta_{lt} & 0 \\ -s\theta_{lt} & 0 & -c\theta_{lt} \\ 0 & c\theta_{lt} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_2 = (1/2)ml\omega_0\left[-l\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta s\phi - l\dot{\phi}s\theta_{lt}s^2\theta + (R-lc\theta)\dot{\theta}c\theta_{lt}c\theta s\phi + (R-lc\theta)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta c\phi\right] \\ \partial B_2/\partial\phi = (1/2)ml\omega_0\left[-l\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi + (R-lc\theta)\dot{\theta}c\theta_{lt}c\theta c\phi - (R-lc\theta)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi\right] \\ \partial B_2/\partial\dot{\phi} = (1/2)ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta + (R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial B_2}{\partial\dot{\phi}} = (1/2)ml\omega_0\begin{Bmatrix} -ls\theta_{lt}\dot{\theta}2s\theta c\theta + (l\dot{\theta}s\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi \\ +(R-lc\theta)c\theta_{lt}\dot{\theta}c\theta c\phi - (R-lc\theta)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi \end{Bmatrix} \\ \partial B_2/\partial\theta = (1/2)ml\omega_0\left\{-R\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\phi - 2l\dot{\phi}s\theta_{lt}s\theta c\theta + l\dot{\phi}c\theta_{lt}(s^2\theta - c^2\theta)c\phi + R\dot{\phi}c\theta_{lt}c\theta c\phi\right\} \\ \partial B_2/\partial\dot{\theta} = (1/2)ml\omega_0\left\{-lc\theta_{lt}s\theta s\theta s\phi + (R-lc\theta)c\theta_{lt}c\theta s\phi\right\} \\ \qquad = (1/2)ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-ls\phi + Rc\theta s\phi\right\} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial B_2}{\partial\dot{\theta}} = (1/2)ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-l\dot{\phi}c\phi + R(-\dot{\theta}s\theta s\phi + \dot{\phi}c\theta c\phi)\right\} \end{cases}$$

$$C^t C = \begin{pmatrix} -s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & 0 \\ -c(\omega_0 t) & -s(\omega_0 t) & 0 \\ -s(\omega_0 t)c\theta_{lt} & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\omega_0 t)s\theta_{lt} & -s(\omega_0 t) & c(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ s(\omega_0 t)s\theta_{lt} & c(\omega_0 t) & s(\omega_0 t)c\theta_{lt} \\ -c\theta_{lt} & 0 & s\theta_{lt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_3 = (1/2)ml^2\left\{(-\dot{\theta}c\theta c\phi + \dot{\phi}s\theta s\phi)^2 + (\dot{\theta}c\theta s\phi + \dot{\phi}s\theta c\phi)^2 + (\dot{\theta}s\theta)^2\right\} \\ \partial B_3/\partial\phi = ml^2\left\{-\dot{\theta}c\theta c\phi\dot{\phi}s\theta c\phi + \dot{\phi}s\theta s\phi\dot{\theta}c\theta s\phi - \dot{\theta}c\theta s\phi\dot{\phi}s\theta s\phi + \dot{\phi}s\theta c\phi\dot{\theta}c\theta c\phi\right\} = 0 \\ \partial B_3/\partial\dot{\phi} = ml^2\dot{\phi}s^2\theta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial B_3}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\} \\ \partial B_3/\partial\theta = ml^2\dot{\phi}\dot{\phi}s\theta c\theta \\ \partial B_3/\partial\dot{\theta} = ml^2\left[-(-\dot{\theta}c\theta c\phi + \dot{\phi}s\theta s\phi)c\theta c\phi + (\dot{\theta}c\theta s\phi + \dot{\phi}s\theta c\phi)c\theta s\phi + (\dot{\theta}s\theta)s\theta\right] \\ \quad = ml^2\left[-(-\dot{\theta}c\theta c\phi)c\theta c\phi + (\dot{\theta}c\theta s\phi)c\theta s\phi + (\dot{\theta}s\theta)s\theta\right] \\ \quad = ml^2\left[\dot{\theta}c\theta c\theta + \dot{\theta}s\theta\theta s\right] \quad = ml^2\dot{\theta} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial B_3}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

ポテンシャル部分は、次のとおりです。

$V = mgl(1-c\theta), \quad dV/\partial\theta = mgls\theta$

(3-7)式の $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$ から、

ϕ:

$$
\begin{aligned}
&ml\omega_0 \left\{ \begin{aligned} &- ls\theta_{lt}\dot{\theta}2s\theta c\theta + \left(l\dot{\theta}s\theta\right)c\theta_{lt}s\theta c\phi \\ &+ \left(R - lc\theta\right)c\theta_{lt}\dot{\theta}c\theta c\phi - \left(R - lc\theta\right)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi \end{aligned} \right\} + ml^2\left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\} \\
&\quad = m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi\left(R - lc\theta\right)\right\} \\
&\quad + ml\omega_0\left[- l\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi + \left(R - lc\theta\right)\dot{\theta}c\theta_{lt}c\theta c\phi - \left(R - lc\theta\right)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&ml^2\left[\omega_0\left\{- 2\dot{\theta}s\theta_{lt}s\theta c\theta + \dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi\right\} + \left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\}\right] \\
&\quad = m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi\left(R - lc\theta\right)\right\} + ml^2\omega_0\left\{- \dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&ml^2\left[2\omega_0\left\{- \dot{\theta}s\theta_{lt}s\theta c\theta + \dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi\right\} + \left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\}\right] \\
&\quad = m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi\left(R - lc\theta\right)\right\}
\end{aligned}
$$

(3-5)式の $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ から、次の関係が得られます。

θ:

$$
\begin{aligned}
&ml\omega_0c\theta_{lt}\left\{- l\dot{\phi}c\phi + R\left(- \dot{\theta}s\theta s\phi + \dot{\phi}c\theta c\phi\right)\right\} + ml^2\ddot{\theta} \\
&\quad = m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta\left(1 - c^2\theta_{lt}c^2\phi\right) - ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left(Rc\theta - lc^2\theta + ls^2\theta\right) + c^2\theta_{lt}\left(R - lc\theta\right)ls\theta\right\} \\
&\quad + ml\omega_0\left\{- R\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\phi - 2l\dot{\phi}s\theta_{lt}s\theta c\theta + l\dot{\phi}c\theta_{lt}\left(s^2\theta - c^2\theta\right)c\phi + R\dot{\phi}c\theta_{lt}c\theta c\phi\right\} \\
&\quad + ml^2\dot{\phi}\dot{\phi}s\theta c\theta - mgls\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- ml^2\dot{\phi}\omega_0c\theta_{lt}c\phi + ml\omega_0\ddot{\theta} \\
&\quad = m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta\left(1 - c^2\theta_{lt}c^2\phi\right) - ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left(Rc\theta - lc2\theta\right) + c^2\theta_{lt}\left(R - lc\theta\right)ls\theta\right\} \\
&\quad + ml^2\omega_0\dot{\phi}\left\{- s\theta_{lt}s2\theta - c\theta_{lt}c2\theta c\phi\right\} + ml^2\dot{\phi}\dot{\phi}s\theta c\theta - mgls\theta
\end{aligned}
$$

3.2.3 運動方程式

(3-7)式および (3-5)式に対応して得られる方程式は、次のとおりです。この導出には、近似をまったく使用していないので、すべての効果を含んでいます。

$$\begin{cases} 2ml^2\omega_0\dot{\theta}s\theta\left\{-s\theta_{lt}c\theta+c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\}+ml^2\left\{\ddot{\phi}s^2\theta+2\dot{\theta}\dot{\phi}s\theta c\theta\right\} \\ \quad =ml\omega_0^2 s\theta c\theta_{lt}\left\{lc\theta_{lt}s\theta s\phi c\phi+Rs\theta_{lt}s\phi-ls\theta_{lt}c\theta s\phi\right\} & (3-8) \\ ml^2\ddot{\theta}=-mgls\theta+ml^2\dot{\phi}^2s\theta c\theta+ml^2\omega_0\dot{\phi}\left\{c\theta_{lt}c\phi-s\theta_{lt}s2\theta-c\theta_{lt}c2\theta c\phi\right\} \\ \quad +m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta\left(1-c^2\theta_{lt}c^2\phi\right)-ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left(Rc\theta-lc2\theta\right)+c^2\theta_{lt}\left(R-lc\theta\right)ls\theta\right\} & (3-9) \end{cases}$$

地球の自転による遠心力の効果は、B_1から出てきてω_0^2に比例します。B_1は振子が静止していても働く遠心力です。遠心力の効果は重力に対して極めて小さいものです。さらに、この遠心力の効果は、振子が静止していても現れ、その錘は地球の中心向から少しずれた方向を向きます（北半球では極わずか南より）。そして、このずれた位置に対して振動運動をすることになります。したがって、実際に振り子をみる立場では、B_1の効果は実際上見えないので、ω_0^2に比例する項を無視してよいものです。すると

$$\begin{cases} 2ml^2\dot{\theta}s\theta c\theta\left(\dot{\phi}-\omega_0 s\theta_{lt}\right)+ml^2s^2\theta\left(\ddot{\phi}+2\dot{\theta}\omega_0 c\theta_{lt}c\phi\right)=0 & (3-10) \\ ml^2\ddot{\theta}=-mgls\theta+ml^2\dot{\phi}^2s\theta c\theta+\dot{\phi}ml^2\omega_0\left(c\theta_{lt}c\phi-s\theta_{lt}s2\theta-c\theta_{lt}c2\theta c\phi\right) & (3-11) \end{cases}$$

が得られます。この方程式は初期条件に応じて振子のいろいろな運動を表すことになりますが、(3-10)式から出てくる最も素直な解は、

$$\dot{\phi}=\omega_0\sin\theta_{lt},\quad \ddot{\phi}=-2\dot{\theta}\omega_0\cos\theta_{lt}\cos\phi \tag{3-12}$$

となります。上式の右の$\ddot{\phi}=-2\dot{\theta}\omega_0\cos\theta_{lt}\cos\phi$で、$\omega_0$は自転の角速度なので小さい量です。また、$\dot{\theta}$は振り子の$\theta$方向の振動に合わせてゼロの周りの値をとるので、$\ddot{\phi}$は平均してゼロになることが期待されます。(3-12)式の最初の$\dot{\phi}=\omega_0\sin\theta_{lt}$は、フーコーの振子の振動面が地球の自転（角速度$\omega_0$）の影響を受けて回転していくことを表します。この振動面の回転周期は、緯度θ_{lt}の場所で$1/\sin\theta_{lt}$日（福岡市なら 1.8 日）となります。

４．大学で数学・力学を履修した人で、力学法則を変分原理から眺めたい人へ

（ラグランジアン・ハミルトニアンと変分法による方程式の導出）

4.1 変分法によるラグランジアンからのラグランジュ方程式の導出

一次元の運動の場合、ラグランジアンは運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーVにより

$$L(x,\dot{x})=T-V \tag{4.1}$$

で定義されます。典型的な場合には$T=(1/2)m\dot{x}^2$であり、この時の運動量$m\dot{x}$は一般運動量$\partial L/\partial\dot{x}$と同じになります。$x(t)$を求めると$\dot{x}(t)$も分かりますから、時間関数$x(t)$を求める問題となります。この節の後で分かりますが、ラグランジュ方程式が成立する条件とは、積分値

$$I[x]=\int_a^b L(x,\dot{x};t)dt \tag{4.2}$$

が、関数$x(t)$の関数形としての微小変化に対して一定になるような条件（$I[x]$が停留値をとる条件）を求めたことになります。ここでは、積分値$I[x]$を、関数$x(t)$の関数（汎関数）とみなします。つまり、求める運動状態$x_0(t)$付近での任意の関数を表現するため、一旦、任意関数$\eta(t)$に微小量εをかけて関数形の変化を表現します。

$$x(t)=x_0(t)+\varepsilon\eta(t),\quad \dot{x}(t)=\dot{x}_0(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t) \tag{4.3}$$

任意関数$\eta(t)$は、$x_0(t)$の境界条件に合わせて、積分区域の最初と最後でゼロになる関数とします。

$$\eta(a)=\eta(b)=0 \tag{4.4}$$

これをもとに、積分値$I[x]$が微小変化εに対して停留値を取るための条件（εによる微分がゼロになる条件）を探します。これは、

$$\left.\frac{dI[x]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

と定式化できます。まず、分かっている微分関係には、(4.2)式、(4.3)式から

$$\frac{dL}{d\varepsilon}=\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\varepsilon},\qquad \frac{\partial x}{\partial\varepsilon}=\eta(t),\quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial\varepsilon}=\dot{\eta}(t)$$

があります。したがって、

$$\frac{dI[x]}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b L(t,x,\dot{x})dt=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\varepsilon}\right)dt=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta(t)+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}(t)\right)dt$$

となります。積分の第二項は、部分積分の関係と$\eta(a)=\eta(b)$の条件により

$$\int_a^b\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}(t)dt=\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\eta(t)\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\bullet\eta(t)dt=-\int_a^b\eta(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)dt$$

と書けるので、第一項と合わせて全体の条件は

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\int_a^b\eta(t)\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\right\}dt=0$$

となります。したがって、$\eta(t)$がどのような任意関数でも $dI/d\varepsilon = 0$ が成立するには、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \left(i.e. \quad \frac{d}{dt}p_x - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\right) \tag{4.5}$$

であれば良いことが分かります。この式は、前章に記したようにオイラー・ラグランジュ方程式またはラグランジュ方程式と呼ばれます。(4.5)式を満たす関数が、(4.3)式の $x_0(t)$となります。(4.5)式は、その形から、

「運動量 $p_x = \partial L/\partial \dot{x}$ の時間変化率」＝「受ける力」

の関係を一般化して表現したものになっています。そこで、(4.2)式の積分が停留値をとる条件とは、結果的にはニュートンの運動方程式を満たすこととなっています。

運動の自由度が n 個の場合には、求める変数が n 個となり、

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \bullet\bullet, x_n, \dot{x}_n; t) = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \bullet, \dot{x}_n) - V(x_1, x_2, \bullet, x_n) \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} x_i(t) = x_{i0}(t) + \varepsilon_i \eta_i(t), \quad \eta_i(a) = \eta_i(b) = 0, \quad i = 1 \sim n \\ \dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i0}(t) + \varepsilon_i \dot{\eta}_i(t) \end{cases}$$

$$I[x_1, x_2, \bullet, x_n] = \int_a^b L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \bullet, \bullet, x_n, \dot{x}_n; t)dt$$

となります。そして、

$$\left.\frac{dI[x_1, x_2, \bullet, x_n]}{d\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i = 0} = 0$$

の条件を求めることになります。各々の自由度毎に変分法の計算をすればよいので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 \sim n \tag{4.7}$$

が得られます。

ラグランジアンから変分原理によってラグランジュ方程式を得る方法は、いろいろな場合に応用できます。電磁場の運動（伝播）を求める場合には、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーと採り方が質点の運動の場合と異なりますが、やはり適用できて、マックスウェル方程式も説明することができます。このように自然界の運動法則は、変分原理によって決まっているとみなすことができます。

4.2 ハミルトニアンの定義とラグランジュ方程式からの正準方程式の導出

ここで再び、一次元の問題に戻って考えてみます。今までは、系の運動を取り扱う時、座標 x と速度 $\dot{x}$ を変数にとって運動を表しました。しかし、実は、この速度 $\dot{x}$ より、質量の効果を含む運動量 p_x の方がより普遍性のある量です。実際、量子力学では、不確定原理は座標 x と運動量 p_x の対について現れますし、量子化は運動量 p_x について考えます。そこで、系の運動を記述するのに、座標 x と速度 $\dot{x}$ を変数として取り扱うのではなくて、座標 x と運動量 p_x を変数として用いる方

法があります。

引き続き、一次元の場合について説明します。ラグランジアンでは、

$L = L(x,\dot{x}),\quad p_x = \partial L / \partial \dot{x}$

となっており、速度$\dot{x}$が直接的な量であり、一般運動量$p_x = \partial L / \partial \dot{x}$は偏微分で表される二義的な量となっています。ラグランジアンのままで、Lをxとp_xの関数としながら運動方程式を表現できたら良いのですが、それはうまくいきません。そこで、$\partial(p_x \dot{x}) / \partial p_x = \dot{x}$ に注目し、速度と一般運動量の役割が交替するように、次の量を定義してみます。

$$H = p_x \dot{x} - L \tag{4.8}$$

このHはハミルトニアンと呼ばれます。

当然のことながら、元来、速度$\dot{x}$は運動量p_xと関係がありp_xの関数とみなすこともできます。一旦、このことを$\dot{x}(p_x^i)$と表すことにしましょう。もちろん、p_x^iとp_xは値としては同じです。これを使うと、

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \left[\frac{\partial}{\partial p_x}(p_x \dot{x} - L)\right]_{\mathrm{exp}licit} + \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x^i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(p_x \dot{x} - L)\right]_{implicit} = \dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x^i}\left(p_x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{x} \tag{4.9}$$

となります。つまり、一般運動量$p_x = \partial L / \partial \dot{x}$の関係を使い$\partial(p_x \dot{x} - L) / \partial \dot{x} = 0$の関係によって、余分な$\dot{x}$依存性を消していることがわかります。そこで、ハミルトニアンとその偏微分関係

$$H = H(x, p_x),\quad \dot{x} = \partial H / \partial p_x \tag{4.10}$$

では、一般運動量p_xが直接的な量であり、速度$\dot{x} = \partial H / \partial p_x$が偏微分で表される二義的な量となっていて、一般運動量と速度の関係がラグランジアンの場合と対称的に反転しています。この手続きによって、ハミルトニアンは、速度と一般運動量の関数として表されます。ハミルトニアンに速度を意味する量が含まれても良いのですが、運動方程式を作る前にすべての速度は必ず一般運動量で表現し直すことが必須です。そして、そのハミルトニアンにより、実際に速度が$\dot{x} = \partial H / \partial p_x$で表される必要があります。

運動方程式は次のように考察できます。(4.8)式のHの微小増分を考えてみると、一般運動量$\partial L / \partial \dot{x} = p_x$の関係により$d\dot{x}$に関わる項が消えて

$$\begin{aligned} dH &= d(p_x \dot{x} - L) = (p_x d\dot{x} + \dot{x} dp_x) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x}\right) \\ &= \dot{x} dp_x - \frac{\partial L}{\partial x}dx + \left(p_x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)d\dot{x} = \dot{x} dp_x - \frac{\partial L}{\partial x}dx \end{aligned} \tag{4.11}$$

となります。一方、関数形が(4.10)式の左の式の形にもなっているので、

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_x}dp_x + \frac{\partial H}{\partial x}dx$$

も成立します。両式を比較して、

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x},\quad -\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.12}$$

の関係があることが分かります。上の左式は、(4.9)式と同じです。一方、ラグランジュ方程式(4.5)式は、一般運動量 $p_x = \partial L/\partial \dot{x}$ と上の右式を使って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{4.13}$$

と書き直すことができます。そこで、(4.9)式と(4.13)式から、２つの関係

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.14}$$

が得られます。(4.14)式は、ハミルトンの正準方程式と呼ばれます。ハミルトニアンを使うときは、この正準方程式を作って、計算していくことになります。

ここで(4.8)式の意味を具体的に考えてみましょう。ラグランジアンは、典型的な場合には

$$L = (1/2)m\dot{x}^2 - V(x), \quad p_x = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$$

となります。そこで

$$H = p_x\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \{(1/2)m\dot{x}^2 - V(x)\} = (1/2)m\dot{x}^2 + V(x) = (1/2m)p_x^2 + V(x)$$

となり、ハミルトニアン H は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を表していることになります。

n 自由度の系の問題の場合には、ハミルトニアンは

$$H = \sum_i p_{xi}\dot{x}_i - L$$

となり、正準方程式は次のように n セット得らます。

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{xi}}, \quad \dot{p}_{xi} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1 \sim n$$

ところで、ハミルトニアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を表すので、正準方程式とは、そのエネルギー和に停留値を与えるような関係になっていそうです。最も簡単な１次元の場合について、次節でそれを調べてみましょう。

4.3 変分法によるハミルトニアンからの正準方程式の導出

ラグランジアンによる一般運動量を使って、一次元運動のハミルトニアンは次のように表せます。

$$H = p_x\dot{x} - L, \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

このハミルトニアンに対して、次の汎関数を考えてみます。

$$I = \int_{t=a}^{b} H(x, p_x; t)dt$$

座標関数の条件は、任意関数 $\eta(t)$ と微小量 ε を使って、まず

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon\eta(t), \quad \eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{4.15}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t) = \dot{x}_0(t)\left\{1 + \frac{\varepsilon\dot{\eta}}{\dot{x}_0}\right\}$$

として、ラグランジアンの場合と同じにします。任意関数 $\eta(t)$ の付加による一般

運動量の変分を求めましょう。p_xの定義から、その変化分を評価すると、

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \to p_x + dp_x = \frac{\partial L}{\partial\left[\dot{x}_0(t)\{1+\varepsilon\dot{\eta}/\dot{x}_0\}\right]} \to dp_x = \left(-\frac{\varepsilon\dot{\eta}}{\dot{x}_0}\right)p_x = \varepsilon\dot{\eta}\alpha, \quad \alpha \equiv -\frac{p_x}{\dot{x}_0}$$

となり、

$$p_x(t) = p_{x0}(t) + \varepsilon\alpha\dot{\eta}(t) \tag{4.16}$$

と書くことができます。上ではパラメータ$\alpha = -p_x/\dot{x}_0$を使いましたが、普通、$p_x/\dot{x}_0$は質量mの意味となりますから、αは負の一定の量とみることができます。停留値を与える条件は、(4.15)式と(4.16)式からの偏微分関係を使って

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{t=a}^{b} H(x, p_x; t)dt = \int_a^b\left(\frac{\partial p_x}{\partial\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial x}\right)dt = \int_a^b\left(\alpha\dot{\eta}(t)\frac{\partial H}{\partial p_x} + \eta(t)\frac{\partial H}{\partial x}\right)dt$$

$$= \left[\alpha\eta(t)\frac{\partial H}{\partial p_x}\right]_{t=a}^{b} + \int_a^b \eta(t)\left\{-\frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial p_x}\right) + \frac{\partial H}{\partial x}\right\}dt = 0$$

となり、

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial p_x}\right) = 0$$

が成立すればよいことになります。(14.15)式より定数αをもとの値に戻すと、

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{p_x}{\dot{x}}\frac{\partial H}{\partial p_x}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_x}{\dot{x}}\frac{\partial H}{\partial p_x}\right) + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{4.17}$$

となります。ハミルトニアンはその定義自体により(4.9)式のように$\dot{x} = \partial H/\partial p_x$を満たすので、(4.17)式から

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.18}$$

が得られます。(4.9)式と(4.18)式の２つの式がハミルトンの正準方程式です。つまり、ハミルトニアンによる汎関数の積分が停留値を取る条件、すなわち運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定値になる条件が、正準方程式となっています。

ラグランジアンの場合には、(4.3)式のように速度変化に対して、$\dot{\eta}(t)$の効果は$\varepsilon\dot{\eta}(t)$となっていました。そして、ラグランジアン$L = T - V$において、軌跡の変化$\varepsilon\eta(t)$による運動エネルギーTの変化とポテンシャルエネルギーVの変化が相殺する条件がラグランジュ方程式になりました。一方、ハミルトニアンは、通常、$H = T + V$となりますが、運動量をベースとしている定式化です。ハミルトニアンの場合には、(4.16)式のように$\dot{\eta}(t)$の効果は運動量変化に対して$\varepsilon\alpha\dot{\eta}(t)$と現れ、$\alpha$による符号変化が生じます。そこで、$H = T + V$というエネルギー和の形であっても、軌跡の変化$\varepsilon\eta(t)$による効果が相殺するように定式化されます。

ハミルトン形式は全エネルギーを基づいており、力学における最も普遍的な形式とされています。例えば、微小体系における量子化は、運動量と座標の不確定原理$\Delta p_x \Delta x \approx \hbar$など、ハミルトン形式における諸量に適用します。そして、最も基本的な量子力学の関係式であるシュレディンガー方程式は、ハミルトニアンに

微分演算子を導入した微分方程式となっています。

4.4 ハミルトニアンによるフーコーの振り子の解析

３章の 3.2.2 節のラグランジアンの議論より、運動エネルギーは、

$$T=(1/2)m\{\dot{x}_0\dot{x}_0+\dot{y}_0\dot{y}_0+\dot{z}_0\dot{z}_0\}=B_1+2B_2+B_3$$

$$\begin{cases} B_1=(1/2)m\omega_0^2\left\{l^2s^2\theta-l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta c^2\phi-2ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta c\phi(R-lc\theta)+c^2\theta_{lt}(R-lc\theta)^2\right\} \\ \partial B_1/\partial\phi=m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi+ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi(R-lc\theta)\right\} \\ \partial B_1/\partial\dot{\phi}=0 \\ \partial B_1/\partial\theta=m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta(1-c^2\theta_{lt}c^2\phi)-ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left\{c\theta(R-lc\theta)+ls^2\theta\right\}+c^2\theta_{lt}(R-lc\theta)ls\theta\right\} \\ \partial B_1/\partial\dot{\theta}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2=(1/2)ml\omega_0\left[-l\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta s\phi-l\dot{\phi}s\theta_{lt}s^2\theta+(R-lc\theta)\dot{\theta}c\theta_{lt}c\theta s\phi+(R-lc\theta)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta c\phi\right] \\ \partial B_2/\partial\phi=(1/2)ml\omega_0\left[-l\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi+(R-lc\theta)\dot{\theta}c\theta_{lt}c\theta c\phi-(R-lc\theta)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi\right] \\ \partial B_2/\partial\dot{\phi}=(1/2)ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta+(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\} \\ \partial B_2/\partial\theta=(1/2)ml\omega_0\left\{-R\dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\phi-2l\dot{\phi}s\theta_{lt}s\theta c\theta+l\dot{\phi}c\theta_{lt}(s^2\theta-c^2\theta)c\phi+R\dot{\phi}c\theta_{lt}c\theta c\phi\right\} \\ \partial B_2/\partial\dot{\theta}=(1/2)ml\omega_0c\theta_{lt}\left\{-ls\phi+Rc\theta s\phi\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_3=(1/2)ml^2\left\{(-\dot{\theta}c\theta c\phi+\dot{\phi}s\theta s\phi)^2+(\dot{\theta}c\theta s\phi+\dot{\phi}s\theta c\phi)^2+(\dot{\theta}s\theta)^2\right\} \\ \partial B_3/\partial\phi=ml^2\left\{-\dot{\theta}c\theta c\phi\dot{\phi}s\theta c\phi+\dot{\phi}s\theta s\phi\dot{\theta}c\theta s\phi-\dot{\theta}c\theta s\phi\dot{\phi}s\theta s\phi+\dot{\phi}s\theta c\phi\dot{\theta}c\theta c\phi\right\}=0 \\ \partial B_3/\partial\dot{\phi}=ml^2\dot{\phi}s^2\theta \\ \partial B_3/\partial\theta=ml^2\dot{\phi}\dot{\phi}s\theta c\theta \\ \partial B_3/\partial\dot{\theta}=ml^2\dot{\theta} \end{cases}$$

ポテンシャル部分は、次のとおりです。

$$V=mgl(1-c\theta)$$

$$dV/\partial\theta=mgls\theta$$

$$\partial V/\partial\phi=0,\quad \partial V/\partial\dot{\phi}=0,\quad dV/\partial\dot{\theta}=0$$

そこで、$\dot{\phi},\dot{\theta}$ に関わる一般運動量（正準共役運動量）は、次のようになります。

$$\begin{cases} p_\phi=\partial L/\partial\dot{\phi}=\partial T/\partial\dot{\phi}=ml^2\dot{\phi}s^2\theta+ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta+(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\} \\ p_\theta=\partial L/\partial\dot{\theta}=\partial T/\partial\dot{\theta}=ml^2\dot{\theta}+ml\omega_0c\theta_{lt}\left\{-ls\phi+Rc\theta s\phi\right\} \end{cases}$$

コリオリの力（地球自転角速度 ω_0 の１次）の項は、一般運動量のなかに入ってしまいます。

定義どおりに、ハミルトニアンを作ると

$$
\begin{aligned}
H &= p_\phi \dot{\phi} + p_\theta \dot{\theta} - (T - V) \\
&= \dot{\phi} m l \omega_0 \left\{ \underline{- l s\theta_{lt} s^2\theta} + \underline{(R - lc\theta) c\theta_{lt} s\theta c\phi} \right\} + \underline{\dot{\phi} m l^2 \dot{\phi} s^2\theta} \\
&\quad + \underline{\underline{\dot{\theta} m l \omega_0 c\theta_{lt} \left\{ - l s\phi + R c\theta s\phi \right\}}} + \underline{\underline{\dot{\theta} m l^2 \dot{\theta}}} \\
&\quad - (1/2) m \omega_0^2 \left\{ l^2 s^2\theta - l^2 c^2\theta_{lt} s^2\theta c^2\phi - 2 l s\theta_{lt} c\theta_{lt} s\theta c\phi (R - lc\theta) + c^2\theta_{lt} (R - lc\theta)^2 \right\} \\
&\quad - m l \omega_0 \left[- \underline{\underline{l \dot{\theta} c\theta_{lt} s\theta s\theta s\phi}} - \underline{l \dot{\phi} s\theta_{lt} s^2\theta} + \underline{\underline{(R - lc\theta) \dot{\theta} c\theta_{lt} c\theta s\phi}} + \underline{(R - lc\theta) \dot{\phi} c\theta_{lt} s\theta c\phi} \right] \\
&\quad - (1/2) m l^2 \left\{ \left(- \underline{\underline{\dot{\theta} c\theta c\phi}} + \underline{\dot{\phi} s\theta s\phi} \right)^2 + \left(\underline{\underline{\dot{\theta} c\theta s\phi}} + \underline{\dot{\phi} s\theta c\phi} \right)^2 + \left(\underline{\underline{\dot{\theta} s\theta}} \right)^2 \right\} \\
&\quad + m g l (1 - c\theta) \\
&= (1/2) \dot{\phi} m l^2 \dot{\phi} s^2\theta + (1/2) \dot{\theta} m l^2 \dot{\theta} \\
&\quad - (1/2) m \omega_0^2 \left\{ l^2 s^2\theta - l^2 c^2\theta_{lt} s^2\theta c^2\phi - 2 l s\theta_{lt} c\theta_{lt} s\theta c\phi (R - lc\theta) + c^2\theta_{lt} (R - lc\theta)^2 \right\} \\
&\quad - (1/2) m l^2 \left\{ - 2 \dot{\theta} c\theta c\phi \dot{\phi} s\theta s\phi + 2 \dot{\theta} c\theta s\phi \dot{\phi} s\theta c\phi \right\} \\
&\quad + m g l (1 - c\theta) \\
&= \frac{1}{2 m l^2 s^2\theta} \left(m l^2 s^2\theta \dot{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2 m l^2} \left(m l^2 \dot{\theta} \right)^2 \\
&\quad + m g l (1 - c\theta) - (1/2) m \omega_0^2 \left\{ \begin{array}{l} l^2 s^2\theta - l^2 c^2\theta_{lt} s^2\theta c^2\phi \\ - 2 l s\theta_{lt} c\theta_{lt} s\theta c\phi (R - lc\theta) + c^2\theta_{lt} (R - lc\theta)^2 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

ハミルトニアンの中では、速度を顕わに使用せずに、運動量を用います。

$$
\begin{cases}
m l^2 \dot{\phi} s^2\theta = p_\phi - m l \omega_0 \left\{ - l s\theta_{lt} s^2\theta + (R - lc\theta) c\theta_{lt} s\theta c\phi \right\} \\
m l^2 \dot{\theta} = p_\theta - m l \omega_0 c\theta_{lt} \left\{ - l s\phi + R c\theta s\phi \right\}
\end{cases}
$$

ハミルトニアンは、一般座標と一般運動量の関数として、次のように書けます。

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2 m l^2 s^2\theta} \left[p_\phi - m l \omega_0 \left\{ - l s\theta_{lt} s^2\theta + (R - lc\theta) c\theta_{lt} s\theta c\phi \right\} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2 m l^2} \left[p_\theta - m l \omega_0 c\theta_{lt} \left\{ - l s\phi + R c\theta s\phi \right\} \right]^2 \\
&\quad + m g l (1 - c\theta) - (1/2) m \omega_0^2 \left\{ \begin{array}{l} l^2 s^2\theta - l^2 c^2\theta_{lt} s^2\theta c^2\phi \\ - 2 l s\theta_{lt} c\theta_{lt} s\theta c\phi (R - lc\theta) + c^2\theta_{lt} (R - lc\theta)^2 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

ハミルトニアンは、ϕ方向運動エネルギー＋θ方向運動エネルギー

＋ポテンシャルエネルギー（重力＋遠心力）

となっています。

コリオリの力（地球自転角速度ω_0の１次）の項は、ポテンシャルエネルギーの一部として作用するのではなく、運動エネルギーへ運動量の付加項として作用します。

確認のため、ハミルトニアンを一般運動量で偏微分すると、

$$\frac{\partial H}{\partial p_\phi} = 2\frac{1}{2ml^2s^2\theta}\left[p_\phi - ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta + (R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\}\right] = \frac{ml^2\dot{\phi}s^2\theta}{ml^2s^2\theta} = \dot{\phi}$$

$$p_\phi = ml^2s^2\theta\dot{\phi} + ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta + (R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = 2\frac{1}{2ml^2}\left[p_\theta - ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-ls\phi + Rc\theta s\phi\right\}\right] = \frac{ml^2\dot{\theta}}{ml^2} = \dot{\theta}$$

$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-ls\phi + Rc\theta s\phi\right\}$$

確かに、一般運動量による偏微分が、（角）速度を表しています。そして、一般運動量と（角）速度の間の関係は保持されています。

ハミルトニアンを一般座標で偏微分して、一般座標方向の力を求めます。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \phi} &= \frac{2}{2ml^2s^2\theta}\left[p_\phi - ml\omega_0\begin{Bmatrix}-ls\theta_{lt}s^2\theta \\ +(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\end{Bmatrix}\right]\left[ml\omega_0(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta s\phi\right] \\
&\quad + \frac{2}{2ml^2}\left[p_\theta - ml\omega_0 c\theta_{lt}\begin{Bmatrix}-ls\phi \\ +Rc\theta s\phi\end{Bmatrix}\right]\left[-ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-l + Rc\theta\right\}c\phi\right] \\
&\quad - (1/2)m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta 2c\phi s\phi + 2ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi(R-lc\theta)\right\} \\
&= \dot{\phi}\left\{ml\omega_0(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta s\phi\right\} + \dot{\theta}\left\{-ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-l + Rc\theta\right\}c\phi\right\} \\
&\quad - m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta c\phi s\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi(R-lc\theta)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \theta} &= \frac{-2c\theta}{2ml^2s^2\theta s\theta}\left[p_\phi - ml\omega_0\left\{-ls\theta_{lt}s^2\theta + (R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\right\}\right]^2 \\
&\quad + \frac{2}{2ml^2s^2\theta}\left[p_\phi - ml\omega_0\begin{Bmatrix}-ls\theta_{lt}s^2\theta \\ +(R-lc\theta)c\theta_{lt}s\theta c\phi\end{Bmatrix}\right]\left[-ml\omega_0\begin{Bmatrix}-2ls\theta_{lt}s\theta c\theta + ls\theta s\theta_{lt}s\theta c\phi \\ +(R-lc\theta)c\theta_{lt}c\theta c\phi\end{Bmatrix}\right] \\
&\quad + \frac{2}{2ml^2}\left[p_\theta - ml\omega_0 c\theta_{lt}\begin{Bmatrix}-ls\phi \\ +Rc\theta s\phi\end{Bmatrix}\right]\left[ml\omega_0 c\theta_{lt}Rs\theta s\phi\right] \\
&\quad + mgls\theta - (1/2)m\omega_0^2\begin{Bmatrix}l^2 2s\theta c\theta - l^2c^2\theta_{lt}2s\theta c\theta c^2\phi \\ -2ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\theta c\phi(R-lc\theta) - 2ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta c\phi ls\theta + c^2\theta_{lt}2(R-lc\theta)ls\theta\end{Bmatrix} \\
&= -c\theta ml^2s\theta\dot{\phi}\dot{\phi} - \dot{\phi}ml\omega_0\left\{-2ls\theta_{lt}s\theta c\theta + ls\theta s\theta_{lt}s\theta c\phi + (R-lc\theta)c\theta_{lt}c\theta c\phi\right\} \\
&\quad + \dot{\theta}ml\omega_0 c\theta_{lt}Rs\theta s\phi \\
&\quad + mgls\theta - m\omega_0^2\begin{Bmatrix}l^2s\theta c\theta(1-c^2\theta_{lt}c^2\phi) \\ -ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi(Rc\theta - lc\theta c\theta - ls\theta s\theta) + c^2\theta_{lt}(R-lc\theta)ls\theta\end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

運動方程式は、$\dot{p}_\phi = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi}$より、

$$\dot{p}_\phi = ml\omega_0 \begin{Bmatrix} -ls\theta_{lt}\dot{\theta}2s\theta c\theta + \left(l\dot{\theta}s\theta\right)c\theta_{lt}s\theta c\phi \\ +\left(R - lc\theta\right)c\theta_{lt}\dot{\theta}c\theta c\phi - \left(R - lc\theta\right)\dot{\phi}c\theta_{lt}s\theta s\phi \end{Bmatrix} + ml^2\left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\}$$

$$= -\begin{bmatrix} \dot{\phi}\left\{ml\omega_0\left(R - lc\theta\right)c\theta_{lt}s\theta s\phi\right\} + \dot{\theta}\left\{-ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-l + Rc\theta\right\}c\phi\right\} \\ -m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta c\phi s\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi\left(R - lc\theta\right)\right\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &ml^2\left[2\omega_0\left\{-\dot{\theta}s\theta_{lt}s\theta c\theta + \dot{\theta}c\theta_{lt}s\theta s\theta c\phi\right\} + \left\{\ddot{\phi}s^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}s\theta c\theta\right\}\right] \\ &\quad = m\omega_0^2\left\{l^2c^2\theta_{lt}s^2\theta s\phi c\phi + ls\theta_{lt}c\theta_{lt}s\theta s\phi\left(R - lc\theta\right)\right\} \end{aligned}$$

さらに、$\dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}$より、

$$\dot{p}_\theta = ml\omega_0 c\theta_{lt}\left\{-l\dot{\phi}c\phi + R\left(-\dot{\theta}s\theta s\phi + \dot{\phi}c\theta c\phi\right)\right\} + ml^2\ddot{\theta}$$

$$= -\begin{bmatrix} -c\theta\, ml^2 s\theta\,\dot{\phi}\dot{\phi} - \dot{\phi}ml\omega_0\left\{-2ls\theta_{lt}s\theta c\theta + ls\theta s\theta_{lt}s\theta c\phi + \left(R - lc\theta\right)c\theta_{lt}c\theta c\phi\right\} \\ +\dot{\theta}ml\omega_0 c\theta_{lt}Rs\theta s\phi \\ +mgls\theta - m\omega_0^2\begin{Bmatrix} l^2s\theta c\theta\left(1 - c^2\theta_{lt}c^2\phi\right) \\ -ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left(Rc\theta - lc\theta c\theta - ls\theta s\theta\right) + c^2\theta_{lt}\left(R - lc\theta\right)ls\theta \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &-ml^2\dot{\phi}\omega_0 c\theta_{lt}c\phi + ml\omega_0\ddot{\theta} \\ &\quad = m\omega_0^2\left\{l^2s\theta c\theta\left(1 - c^2\theta_{lt}c^2\phi\right) - ls\theta_{lt}c\theta_{lt}c\phi\left(Rc\theta - lc2\theta\right) + c^2\theta_{lt}\left(R - lc\theta\right)ls\theta\right\} \\ &\quad + ml^2\omega_0\dot{\phi}\left\{-s\theta_{lt}s2\theta - c\theta_{lt}c2\theta c\phi\right\} + ml^2\dot{\phi}\dot{\phi}s\theta c\theta - mgls\theta \end{aligned}$$

これらは、ラグランジアンで求めた場合の方程式と同じになります。

４章のまとめ

〇ニュートンの運動方程式　（位置と速度）

各方向毎に、作用する力（そのもの）による運動量の時間変化（加速度・質量積）の関係を設定する。

〇ラグランジアンによる方法　（位置と速度）

偏微分の操作を利用して、運動量ベクトル、力ベクトルを表す。したがって、スカラー量である運動エネルギーT、ポテンシャルエネルギーVを使って定式化できる。ラグランジアン$L(x_\mu, \dot{x}_\mu) = T - V$に基づき、運動方程式を導出する。

利点　力の方向毎の定式化を回避できる。問題に合わせて都合のよい座標変数が取れる。

特徴　$p_\mu = \partial L(x_\mu, \dot{x}_\mu) / \partial \dot{x}_\mu$：一般運動量（正準共役運動量）

〇ハミルトニアンによる方法　（位置と運動量）

位置と正準共役運動量を用いて、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である全エネルギー（ハミルトニアン$H(x_\mu, p_\mu)$）を一定にする形で定式化する。量子力学の量子化は、位置と正準共役運動量に基づくハミルトニアンで生じる。

力学における最も普遍的な形式である。しかし、一旦、正準共役運動量を求める必要がある。

特徴　$\dot{x}_\mu = \partial H(x_\mu, p_\mu) / \partial p_\mu = (\partial / \partial p_\mu)\{p_\mu \dot{x}_\mu - L\} = \dot{x}_\mu - (\partial \dot{x}_\mu / \partial p_\mu)\{p_\mu - (\partial / \partial \dot{x}_\mu) L\}$

５．ラグランジアンを用いたマックスウェル方程式の導出

5.1　マックスウェル方程式とポテンシャル

電磁気学の基本となるマックスウェル方程式（微分形）は、真空中$(\varepsilon \to \varepsilon_0,\ \ \mu \to \mu_0)$では次のように書けます。

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}) & (5-1) \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \qquad (\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}) & (5-2) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho & (5-3) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 & (5-4) \end{cases}$$

次に定義されるスカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を用いて、電場・磁場を表すことにします。次の定義では、(5-1)式と(5-4)式は自動的に満たされます。

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \end{cases}$$

次に(5-2)式を考えます。(5-2)式の$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0, \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$を上の定義によるポテンシャルで表して、

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{J}$$

$$\left\{\mathrm{grad}(\mathrm{div}) - \nabla^2\right\}\boldsymbol{A} - \varepsilon_0\mu_0\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right\} = \mu_0 \boldsymbol{J}, \qquad c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$$

$$\mathrm{grad}\left\{\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{c^2\partial t}\phi\right\} - \nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{c^2\partial t^2} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

となります。ここで、$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \dfrac{\partial}{c^2\partial t}\phi = 0$（Lorentz 条件）を課すと、

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{c^2\partial t^2} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J} \qquad (5-2')$$

が得られます。

一方、(5-3)式の$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$をポテンシャルで表現すると、

$$\varepsilon_0 \mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \mathrm{div}\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ここで、Lorentz 条件により$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = -c^{-2}\partial\phi/\partial t$を代入すると、

$$\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \nabla^2\left(\frac{\phi}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}c\rho = \mu_0 c\rho$$

となります。さらに、$\phi/c = A^0,\quad c\rho = j^0,\quad ct = x^0$と置くと、

$$\frac{\partial^2 A^0}{\partial (x^0)^2} - \nabla^2 A^0 = \mu_0 j^0 \qquad (5\text{-}3')$$

が得られます。(5-2')(5-3')式をまとめて書くと

$$-\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial (x^0)^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}\right) A^\nu = -\mu_0 j^\nu,\quad \nu = 0 \sim 3 \qquad (5\text{-}4)$$

となります。このように、ポテンシャルを使うと、Maxwell 方程式がすっきりした形に表記できます。

しかしながら、より統一的に表現するためには、次のように複素数を使うと便利です。複素数を下付き添え字で、今までの実数の量を上付き添え字で表します。

$$x_0 \equiv x^0 / i = ct/i,\quad x_k \equiv x^k$$

$$A_0 \equiv A^0 = \phi/c,\quad A_k \equiv iA^k$$

を用いて、磁場を虚数、電場を実数で表します。

$$B_k = \frac{\partial A_{k+2}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial A_{k+1}}{\partial x_{k+2}} = iB^k,\quad E_k = \frac{\partial A_k}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_k} = \frac{E^k}{c}$$

さらに、電荷と電流を $j_0 \equiv j^0 = c\rho,\quad j_k \equiv i\, j^k = i v^k \rho$ と記して

$$\sum_{\mu=0-3} \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial (x_\mu)^2} = -\mu_0 j_\nu \quad \text{with} \quad \sum_{\mu=0-3} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (5-5)$$

となります。

5.2　電磁場のラグランジアン密度

電磁場ではエネルギーは密度の形で表すことになります。ラグランジアン密度を作るには、エネルギー項とポテンシャル項が必要です。それらを次のように採ってみます。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mu_0}\left\{\displaystyle\sum_{k=1-3}(E_k)^2 + \sum_{k=1-3}(B_k)^2\right\} = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\sum_{k=1-3}\left(E^k\right)^2 - \dfrac{1}{2\mu_0}\displaystyle\sum_{k=1-3}\left(B^k\right)^2 \\ \displaystyle\sum_{\mu=0-3} j_\mu A_\mu = \rho c\,\phi/c - \sum_{k=1-3}\rho v^k A^k \end{cases}$$

すると、ラグランジアン密度$\widetilde{L}$は、次のようになります。

$$\begin{aligned} \widetilde{L} &= \frac{1}{2\mu_0}\left\{\sum_{k=1-3}(E_k)^2 + \sum_{k=1-3}(B_k)^2\right\} - \sum_{\mu=0-3} j_\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1-3}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_k}\right)^2 \\ &+\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)^2 \end{aligned}\right\} - \sum_{\mu=0-3} j_\mu A_\mu \end{aligned}$$

まず、スカラーポテンシャル $A_0 = A^0 = \phi/c$ に成立する関係を求めます。ポテンシャル A_0 を座標変数のように取り扱ってみます。この A_0 は、時間と位置に

$A_0 = A_0(x_0, x_1, x_2, x_3)$の依存性があるので、ラグランジュ方程式は、5.4 節のように

$$\sum_{\mu=0-3} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_0 / \partial x_\mu)} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial A_0} = 0$$

と取ります。書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_0 / \partial x_0)} + \sum_{k=1-3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_0 / \partial x_k)} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial A_0} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left\{0 - \sum_{k=1-3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_k}\right)\right\} - (-j_0) = 0$$

$$\sum_{k=1-3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial A_0}{\partial x_k} - \sum_{k=1-3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial A_k}{\partial x_0} = -\mu_0 j_0$$

上の左辺に、$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial A_0}{\partial x_0}$と$-\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial A_0}{\partial x_0}$を補うと

$$\sum_{\mu=0-3} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{\mu=0-3} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = -\mu_0 j_0$$

が得られます。ここで Lorentz 条件$\sum_{\mu=0-3} \partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$を課すと

$$\sum_{\mu=0-3} \frac{\partial^2 A^0}{\partial(x_\mu)^2} = -\mu_0 j^0 \qquad (5-6)$$

となります。

ベクトルポテンシャル$A_j = iA^j$についても、下記のとおり、上式と同じ関係が求まります。

$$\sum_{\mu=0-3} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_j / \partial x_\mu)} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial A_j} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_j / \partial x_0)} + \sum_{k=1-3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial A_j / \partial x_k)} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial A_j} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{j+2}}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_{j+2}} - \frac{\partial A_{j+2}}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_{j+1}}\left(\frac{\partial A_{j+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_{j+1}}\right)\right\} - (-j_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial A_j}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} \frac{\partial A_j}{\partial x_{j+1}} + \frac{\partial}{\partial x_{j+2}} \frac{\partial A_j}{\partial x_{j+2}} - \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial A_0}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{j+2}} \frac{\partial A_{j+2}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} \frac{\partial A_{j+1}}{\partial x_j} = -\mu_0 j_j$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial A_j}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} \frac{\partial A_j}{\partial x_{j+1}} + \frac{\partial}{\partial x_{j+2}} \frac{\partial A_j}{\partial x_{j+2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_{j+2}}{\partial x_{j+2}} + \frac{\partial A_{j+1}}{\partial x_{j+1}}\right) = -\mu_0 j_j$$

左辺に、$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j}$と$-\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j}$を補うと

$$\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial^2 A_j}{\partial(x_\mu)^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=-\mu_0 j_j$$

$$\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial^2 A_j}{\partial(x_\mu)^2}=-\mu_0 j_j \quad \text{with} \quad \sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0;\quad \text{Lorentz condition} \qquad (5-7)$$

(5-6)（5-7)式は、（5- 5）式と同じです。このように、ラグランジアン密度から、Lorentz 条件の成立を前提にして、Maxwell 方程式が導かれました。このことから、電場と磁場を記述する最初の Maxwell 方程式が、ラグランジアンに関わる通常の力学原理（相互作用ポテンシャルの微分による力によって正準共役運動量が時間変化）に従っていたことが分かります。

5.3　電磁場のハミルトニアン密度

次にハミルトニアン密度を考えてみます。ハミルトニアン密度を作るには、正準共役運動量が必要になります。正準共役運動量を定義するために、通常、$\partial A_0/\partial x_0$（実際的には$\partial A_\mu/\partial x_\mu$の中のひとつ）含む形が選択されます。このとき、付随して補助スカラー場B_0が導入されます。

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2\mu_0}\left\{\sum_{k=1-3}E_kE_k+\sum_{k=1-3}B_kB_k-B_0B_0\right\}-\frac{B_0}{\mu_0}\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}-\sum_{\mu=0-3}j_\mu A_\mu$$

を使って計算すると、下記の関係が導かれます。

$$\sum_\mu\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial(x_\mu)^2}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(B_0+\sum_\mu\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)=-\mu_0 j_\nu$$

$B_0=-\sum_\mu\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$が成立するとき、

$$\sum_\mu\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial(x_\mu)^2}=-\mu_0 j_\nu$$

となります。補助スカラー場B_0の形式的な導入によってラグランジアンを定義しましたが、Lorentz 条件のときは$B_0=0$となり、B_0は大して意味のない場となります。しかし、補助スカラー場B_0は電磁磁相互作用と異なる相互作用（弱い相互作用や強い相互作用）では現実に意味をもって自然界に存在するかも知れません。

次のラグランジアン密度に対し

$$\widetilde{L}=\left[\frac{1}{2\mu_0}\left\{\sum_{k=1-3}E_kE_k+\sum_{k=1-3}B_kB_k-B_0B_0\right\}-\frac{1}{\mu_0}B_0\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right]-\sum_{\mu=0-3}j_\mu A_\mu$$

電場を意識して、正準共役運動量を定義します。

$$\begin{cases}\pi_0=\dfrac{\partial\widetilde{L}}{\partial(\partial A_0/\partial x_0)}=-\dfrac{B_0}{\mu_0}\\[2ex] \pi_k=\dfrac{\partial\widetilde{L}}{\partial(\partial A_k/\partial x_0)}=\dfrac{E_k}{\mu_0}=\dfrac{1}{\mu_0}\left(-\dfrac{\partial A_0}{\partial x_k}+\dfrac{\partial A_k}{\partial x_0}\right)\end{cases}$$

空間方向(k 方向）の正準共役運動量は空間電場E_kに比例します。時間方向(0 方

向)の正準共役運動量は、補助スカラー場B_0で決まります。そこで、B_0は時間方向の電場とも云える場となっています。しかし、B_0の複素数型が虚数となるため、空間磁場と同じ型になります。

ハミルトニアン密度は、導出の手続きに従って、

$$\widetilde{H}=\sum_{k=1-3}\pi_k\frac{\partial A_k}{\partial x_0}+\pi_0\frac{\partial A_0}{\partial x_0}-\widetilde{L}$$

に取ります。

$\dfrac{\partial A_k}{\partial x_0}=E_k+\dfrac{\partial A_0}{\partial x_k}$ を使って

$$\begin{aligned}\widetilde{H}&=\sum_{k=1-3}\frac{1}{\mu_0}E_k\left(E_k+\frac{\partial A_0}{\partial x_k}\right)+\left(-\frac{B_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial A_0}{\partial x_0}-\frac{1}{2\mu_0}\left\{\sum_{k=1-3}E_kE_k+\sum_{k=1-3}B_kB_k\right\}+\frac{B_0B_0}{2\mu_0}\\&\quad+\frac{B_0}{\mu_0}\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}+\sum_{\mu=0-3}j_\mu A_\mu\\&=\frac{1}{2\mu_0}\left\{\sum_{k=1-3}E_kE_k-\sum_{k=1-3}B_kB_k\right\}+\frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1-3}E_k\frac{\partial A_0}{\partial x_k}-\frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial A_0}{\partial x_0}+\frac{B_0B_0}{2\mu_0}\\&\quad+\frac{B_0}{\mu_0}\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}+\sum_{\mu=0-3}j_\mu A_\mu\\&=\left[\frac{1}{2\mu_0}\sum_{k=1-3}E_k\left\{E_k-2\left(-\frac{\partial A_0}{\partial x_k}\right)\right\}-\frac{1}{2\mu_0}\sum_{k=1-3}B_kB_k+\frac{1}{2\mu_0}B_0\left\{B_0-2\frac{\partial A_0}{\partial x_0}\right\}\right]\\&\quad+\frac{B_0}{\mu_0}\left\{\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right\}+\sum_{\mu=0-3}j_\mu A_\mu\end{aligned}$$

となり、多少の補正が入りますが、電場、磁場および補助スカラー場のエネルギー密度と、相互作用エネルギー密度の和となります。

5.4　場の量に対するラグランジュ方程式

力学、電磁気学、量子力学では、しばしば、場の量を取り扱います。ここでは、ラグランジアンによる場の量の取り扱いの例を示します。

場の量として、電磁気学の 4 元ポテンシャル $A^{\nu}\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right);\ \nu=0\sim3$，$(x^0=ct,\ A^0=\phi/c)$を考えることにします。それによるラグランジアン$L=T-V$が、次の関数形で与えられるとします。

$$L\left(A^{\nu},\partial_{\mu=0-3}A^{\nu}\right),\quad \partial_{\mu}\equiv\partial/\partial x^{\mu}$$

そして、次の積分値Iが停留値をとるように場の関数を決めることになります。

$$I=\int_{x_a}^{x_b}L\left(A^{\nu},\partial_{\mu}A^{\nu}\right)d^4x,\quad x\equiv\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right),\quad x_a\equiv\left(x_a^0,x_a^1,x_a^2,x_a^3\right)$$

ここで、ポテンシャルA^{ν}の変分を表すために任意関数$\eta^{\nu}(x)$を導入します。拘束として、積分の始点と終点でゼロになる条件$\eta^{\nu}(x_a)=\eta^{\nu}(x_b)=0$を課します。$A^{\nu}$および$\partial_{\mu}A^{\nu}$の微小変化は、次のように表わされます。

$$A^{\nu}\to A^{\nu}+\varepsilon\eta^{\nu},\quad \partial_{\mu}A^{\nu}\to\partial_{\mu}A^{\nu}+\varepsilon\,\partial_{\mu}\eta^{\nu}$$

したがって、積分値が停留値をとる条件は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial\varepsilon}&=\int_{x_a}^{x_b}\left\{\eta^{\nu}\frac{\partial L}{\partial A^{\nu}}+\sum_{\mu}\partial_{\mu}\eta^{\nu}\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right)}\right\}d^4x\\&=\sum_{\mu}\left[\eta^{\nu}\int\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right)}d^{(3)}x\right]_{x_a}^{x_b}+\int_{x_a}^{x_b}\eta^{\nu}\left\{\frac{\partial L}{\partial A^{\nu}}-\sum_{\mu}\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right)}\right\}d^4x\\&=\int_{x_a}^{x_b}\eta^{\nu}\left\{\frac{\partial L}{\partial A^{\nu}}-\sum_{\mu}\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right)}\right\}d^4x=0\end{aligned}$$

となります。この関係が任意関数$\eta^{\nu}(x)$に対して成立するとき、場に関する次のラグランジュ方程式を得ます。

$$\frac{\partial L}{\partial A^{\nu}}-\sum_{\mu}\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right)}=0$$

量子力学の波動関数なども、場の量と同様に取り扱うことができます。

5.5　電磁場中の相対論的古典粒子の運動

良く知られているように、z方向に運動している相対論的速度の粒子の運動量は、静止質量m_0と$\gamma=1/\sqrt{1-(\beta)^2}$を用いて、$m_0\gamma\left(dz/dt\right)=m\left(dz/dt\right)$と書くことができます。しかし、運動している物体に固定して定義した固有時間τを用いると、次のように、相対論の表現が簡単になります。

$$p^3=m\frac{dz}{dt}=m_0\frac{dz}{d\tau}=m_0\frac{dz}{dt}\frac{dt}{d\tau},\quad \gamma=\frac{dt}{d\tau}$$

ここでは、固有時間τによる微分をドットで表現することにします。

$$\dot{x}_0=\frac{d\left(x^0/i\right)}{d\left(\tau/i\right)}=\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{d(ct)}{d\tau},\quad \dot{x}_k=\frac{d\left(x^k\right)}{d\left(\tau/i\right)}=i\frac{dx^k}{d\tau}$$

特殊相対論の関係式は$\sqrt{\sum_{\mu=0-3}(m_0\dot{x}_\mu)^2}=m_0c$となるので、固有時間による速度には$\sum_{\mu=0-3}(\dot{x}_\mu)^2=c^2$の関係があります。電磁場中の相対論的粒子の運動を表すラグランジアンは

$$L=\sqrt{\sum_{\mu=0-3}(m_0\dot{x}_\mu)^2}+\sum_{\mu=0-3}q\dot{x}_\mu A_\mu$$

となります。相互作用エネルギーは速度に依存しています。そこで、このエネルギーは運動エネルギーとして取り扱うべきであり、見かけ上、$L=T+V$のようになります。正準共役運動量は、

$$p_\mu=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\mu}=\frac{(m_0)^2\dot{x}_\mu}{\sqrt{\sum_\nu(m_0\dot{x}_\nu)^2}}+qA_\mu=m_0\dot{x}_\mu+qA_\mu,$$

となります。ラグランジュ方程式によって

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu}-\frac{\partial}{\partial(\tau/i)}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\mu}=0,\quad q\sum_\nu\dot{x}_\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{d}{d(\tau/i)}\{m_0\dot{x}_\mu+qA_\mu\}=0$$

が得られます。そこで、

$$m_0\ddot{x}_\mu=q\sum_\nu\dot{x}_\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-q\frac{d}{d(\tau/i)}A_\mu=q\sum_{\nu\neq\mu}\dot{x}_\nu\left\{\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right\}$$

なります。実数を使って表現すると、時間成分と空間成分は、それぞれ

$$\mu=0\quad m_0\ddot{x}_0=im_0\frac{d^2x^0}{d\tau^2}=q\sum_{k=1-3}iv^k\left\{\frac{\partial iA^k}{\partial x^0/i}-\frac{\partial A^0}{\partial x^k}\right\}$$

$$m_0\frac{d^2x^0}{d\tau^2}=q\sum_{k=1-3}v^k\left\{-\frac{\partial A^k}{\partial x^0}-\frac{\partial A^0}{\partial x^k}\right\}$$

$$\mu=k\quad m_k\ddot{x}_k=-m_0\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=qv^0\left\{\frac{\partial A^0}{\partial x^k}-\frac{\partial iA^k}{\partial x^0/i}\right\}+q\sum_{j\neq k}iv^j\left\{\frac{\partial iA^j}{\partial x^k}-\frac{\partial iA^k}{\partial x^j}\right\}$$

$$m_0\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=qv^0\left\{-\frac{\partial A^0}{\partial x^k}-\frac{\partial A^k}{\partial x^0}\right\}+q\sum_{j\neq k}v^j\left\{\frac{\partial A^j}{\partial x^k}-\frac{\partial A^k}{\partial x^j}\right\}$$

となり、電場、磁場による運動方程式となっています。ハミルトニアンは、形式的に$H=\sum_{\mu=0-3}p_\mu\dot{x}_\mu-L$と導くことができるはずです。今の場合にこれを実行すると、$H=0$になってしまいますが、これは質量と電磁相互作用の特殊な関係に起因します。しかし、実際的にはハミルトニアンとして$H=\sqrt{\sum_{\mu=0-3}(p_\mu-qA_\mu)^2}$を採ることができます。確かに、これを使うと、

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu}=\frac{p_\mu-qA_\mu}{\sqrt{\sum_\nu(p_\mu-qA_\mu)^2}}=\frac{m_0\dot{x}_\mu}{\sqrt{\sum_\nu(p_\mu-qA_\mu)^2}}=\dot{x}_\mu$$

なり、ハミルトニアンの要件を満たします。結果的には、電磁場中では、自由粒

子の運動量を $p_\mu \to p_\mu - qA_\mu$ と修正すれば良いことが分かります。ただし、このとき、実運動量は $p_\mu - qA_\mu$ となります。

5.6　量子力学的粒子の電磁場中の運動

前述のように特殊相対論の関係式は $\sum_{\mu=0-3}(p_\mu)^2 = (m_0 c)^2$ と表されます。この時間運動量（全エネルギー）と空間運動量を表す演算子を用いると、Klein-Gordon 方程式と呼ばれる次の方程式が得られます。

$$-\sum_{\mu=0-3}\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial(x_\mu)^2}\phi = (m_0 c)^2\phi \to \sum_{\mu=0-3}\frac{\partial^2}{\partial(x_\mu)^2}\phi = -(m_0)^2\phi$$

ここでは、簡単のために $c = \hbar = 1$ と略記することにします。対応するラグランジアン密度は、これから示すように、

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\bullet\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}(m_0)^2\phi^2$$

となります。変分 $\phi \to \phi + \delta\phi$ を考えると、これに対応して

$$\delta\tilde{L} = \sum_{\mu=0-3}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\bullet\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_\mu} - (m_0)^2\phi\delta\phi$$

となります。そこで、積分値の変化は、部分積分の効果を含めて、

$$\delta\tilde{I} = \int\left\{\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\bullet\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_\mu} - (m_0)^2\phi\delta\phi\right\}d^4x = \int\delta\phi\left\{-\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - (m_0)^2\phi\right\}d^4x = 0$$

となります。$\delta\phi$ の任意の変化に対して成立するためには、

$$\sum_{\mu=0-3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + (m_0)^2\phi = 0$$

が成立することになり、確かに Klein-Gordon 方程式となっています。古典的関係では、電磁場中の運動は、運動量が $p_\mu \to p_\mu - qA_\mu$ と変換しました。そこで、電磁場中の運動では、運動量の演算子である偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - qA_\mu$$

と置き換えればよいことが分かります。このような微分は、共変微分と呼ばれます。